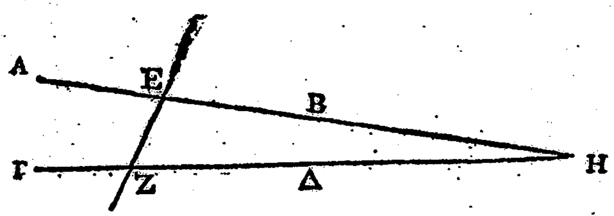
## PROPOSITION XXVII.

Si une droite tombant sur deux droites fait les angles alternes égaux entr'eux, ces deux droites seront parallèles.




Que la droite EZ tombant sur les deux droites AB, ΓΔ fasse les angles alternes AEZ, EZΔ égaux entr'eux; je dis que la droite AB est parallèle à la droite ΓΔ.

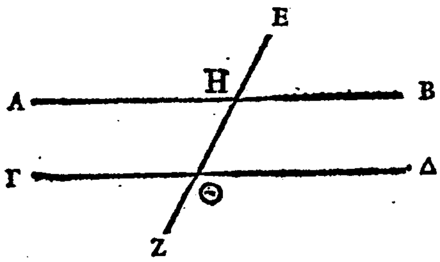
Car si elle ne lui est pas parallèle, les droites AB, ΓΔ étant prolongées se rencontreront, ou du côté BΔ, ou du côté AΓ. Qu'elles soient prolongées, et qu'elles se rencontrent du côté BΔ, au point H.

L'angle extérieur AEZ du triangle EHZ est égal à l'angle intérieur et opposé EZH, ce qui est impossible (16); donc les droites AB, ΓΔ prolongées du côté BΔ ne se rencontreront point. On démontrera de la même manière qu'elles ne se rencontreront pas non plus du côté AΓ; mais les droites qui ne se rencontrent d'aucun côté sont parallèles (déf. 35); donc la droite AB est parallèle à la droite ΓΔ. Donc, etc.

## PROPOSITION XXVIII.

Si une droite tombant sur deux droites fait l'angle extérieur égal à l'angle intérieur, opposé, et placé du même côté, ou bien si elle fait les angles intérieurs et placés du même côté égaux à deux droits, ces deux droites seront parallèles.

Que la droite EZ tombant sur les droites AB, ΓΔ fasse l'angle extérieur EHB égal à l'angle intérieur HΘΔ, opposé, et placé du même côté, ou bien les angles BHΘ, HΘΔ intérieurs, et placés du même côté, égaux à deux droits; je dis que la droite AB est parallèle à la droite ΓΔ.



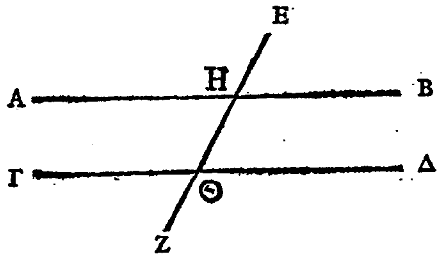

Car puisque l'angle EHB est égal à l'angle HΘΔ, et que l'angle EHB est égal à l'angle AHΘ (15), l'angle AHΘ est égal à l'angle HΘΔ; mais ces angles sont alternes; donc la droite AB est parallèle à la droite ΓΔ (27).

De plus, puisque les angles BHΘ, HΘΔ sont égaux à deux droits, et que les angles AHΘ, BHΘ sont aussi égaux à deux droits (13), les angles AHΘ, BHΘ seront égaux aux angles BΘH, HΘΔ. Retranchons l'angle commun BHΘ; l'angle restant AHΘ sera égal à l'angle restant HΘΔ; mais ces deux angles sont alternes; donc la droite AB est parallèle à la droite ΓΔ. (27). Donc, etc.

## PROPOSITION XXIX.

Une droite qui tombe sur deux droites parallèles, fait les angles alternes égaux entr'eux, l'angle extérieur, égal à l'angle intérieur opposé et placé du même côté, et les angles intérieurs placés du même côté, égaux à deux droits.

Que la droite EZ tombe sur les droites parallèles AB, ΓΔ; je dis que cette droite fait les angles alternes AHΘ, HΘΔ égaux entr'eux, l'angle extérieur EHB, égal à l'angle HΘΔ intérieur opposé et placé du même côté, et les angles BHΘ, HΘΔ intérieurs et placés du même côté, égaux à deux droits.




Car si l'angle AHΘ n'est pas égal à l'angle HΘΔ, l'un d'eux est plus grand. Que l'angle AHΘ soit plus grand que HΘΔ. Ajoutons l'angle commun BHΘ, les angles AHΘ, BHΘ seront plus grands que les angles BHΘ, HΘΔ; mais les angles AHΘ, BHΘ sont égaux à deux droits (13); donc les angles BHΘ, HΘΔ sont moindres que deux droits. Mais si deux droites sont prolongées à l'infini du côté où les angles intérieurs sont plus petits que deux droits, ces droites se rencontrent (dem. 5); donc les droites AB, ΓΔ prolongées à l'infini se rencontreront. Mais elles ne se rencontreront pas, puisqu'elles sont parallèles; donc les angles AHΘ, HΘΔ ne sont point inégaux; donc ils sont égaux. Mais l'angle AHΘ est égal à l'angle EHB (15); donc l'angle EHB est égal à l'angle HΘΔ.

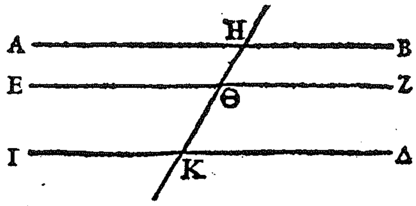
Ajoutons l'angle commun BHΘ, les angles EHB, BHΘ seront égaux aux angles BHΘ, HΘΔ; mais les angles EHB, BHΘ sont égaux à deux droits (13); donc les angles BHΘ, HΘΔ sont égaux à deux droits. Donc, etc.

## PROPOSITION XXX.

Les droites parallèles à une même droite sont parallèles entr'elles.

Que chacune des droites AB, ΓΔ soit parallèle à EZ; je dis que AB est parallèle à ΓΔ.

Que la droite HK tombe sur les droites AB, ΓΔ.

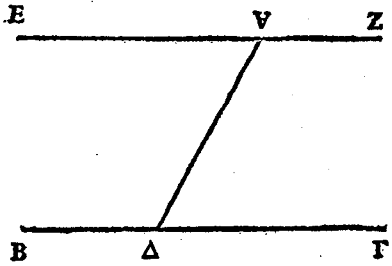



Puisque la droite HK tombe sur les droites parallèles AB, EZ, l'angle AHΘ est égal à l'angle HΘZ (27). De plus, puisque la droite HK tombe sur les droites parallèles EZ, ΓΔ, l'angle HΘZ est égal à l'angle HKΔ (28). Mais on a démontré que l'angle AHK est égal à l'angle HΘZ; donc l'angle AHK est égal à l'angle HKΔ; mais ces angles sont alternes; donc AB est parallèle à ΓΔ (29). Donc, etc.

## PROPOSITION XXXI.

Par un point donné, conduire une ligne droite parallèle à une droite donnée.

Soit A le point donné, et BΓ la droite donnée; il faut par le point A conduire une ligne droite parallèle à la droite BΓ.




Prenons sur la droite BΓ un point quelconque Δ, et joignons AΔ; construisons sur la droite ΔA, et au point A de cette droite, l'angle ΔAE égal à l'angle AΔΓ (23), et prolongeons la droite AZ dans la direction de EA.

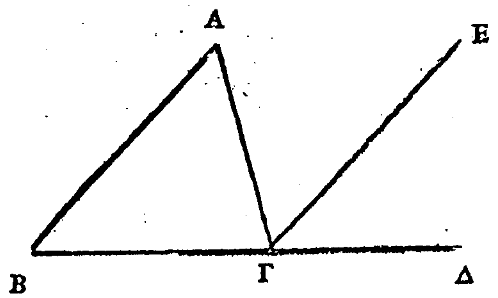
Puisque la droite AΔ, tombant sur les deux droites BΓ, EZ, fait les angles alternes EAΔ, AΔΓ égaux entr'eux, la droite EZ est parallèle à droite BΓ (27).

Donc la ligne droite EAZ a été menée, par le point donné A, parallèle à la droite donnée BΓ; ce qu'il fallait faire.

## PROPOSITION XXXII.

Ayant prolongé un côté d'un triangle quelconque, l'angle extérieur est égal aux deux angles intérieurs et opposés ; et les trois angles intérieurs du triangle sont égaux à deux droits.

Soit le triangle ΑΒΓ ; et prolongeons le côté ΒΓ en Δ ; je dis que l'angle extérieur ΑΓΔ est égal aux angles intérieurs et opposés ΓΑΒ, ΑΒΓ ; et que les trois angles intérieurs ΑΒΓ, ΒΓΑ, ΓΑΒ sont égaux à deux droits.




Menons, par le point Γ, la droite ΓΕ parallèle à ΑΒ (31).

Puisque ΑΒ est parallèle à ΓΕ, et que ΑΓ tombe sur ces droites, les angles alternes ΒΑΓ, ΑΓΕ sont égaux entr'eux (29). De plus, puisque la droite ΑΒ est parallèle à la droite ΓΕ, et que la droite ΒΔ tombe sur ces droites, l'angle extérieur ΕΓΔ est égal à l'angle intérieur et opposé ΑΒΓ. Mais on a démontré que l'angle ΑΓΕ est égal à l'angle ΒΑΓ ; donc l'angle extérieur ΑΓΔ est égal aux deux angles intérieurs et opposés ΒΑΓ, ΑΒΓ.

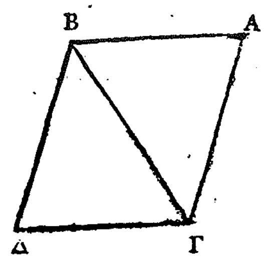
Ajoutons l'angle commun ΑΓΒ ; les angles ΑΓΔ, ΑΓΒ seront égaux aux trois angles ΑΒΓ, ΒΓΑ, ΓΑΒ. Mais les angles ΑΓΔ, ΑΓΒ sont égaux à deux droits (13) ; donc les angles ΑΓΒ, ΓΒΑ, ΓΑΒ sont égaux à deux droits. Donc, etc.

## PROPOSITION XXXIII.

Les droites qui joignent, des mêmes côtés, des droites égales et parallèles, sont elles-mêmes égales et parallèles.

Soient ΑΒ, ΓΔ deux droites égales et parallèles ; que les droites ΑΓ, ΒΔ les joignent des mêmes côtés ; je dis que les droites ΑΓ, ΒΔ sont égales et parallèles.

Joignons ΒΓ.



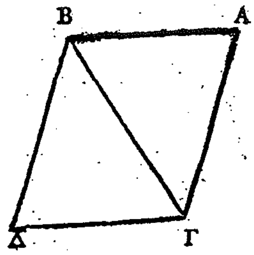

Puisque ΑΒ est parallèle à ΓΔ, et que ΒΓ tombe sur ces droites, les angles alternes ΑΒΓ, ΒΓΔ sont égaux entr'eux (29). De plus, puisque ΑΒ est égale à ΓΔ, et que la droite ΒΓ est commune, les deux droites ΑΒ, ΒΓ sont égales aux deux droites ΓΔ, ΒΓ; mais l'angle ΑΒΓ est égal à l'angle ΒΓΔ; donc la base ΑΓ est égale à la base ΒΔ, le triangle ΑΒΓ est égal au triangle ΒΓΔ, et les angles restants, opposés à des côtés égaux, seront égaux, chacun à chacun (4); donc l'angle ΑΓΒ est égal à l'angle ΓΒΔ. Mais la droite ΒΓ tombant sur les deux droites ΑΓ, ΒΔ fait les angles alternes ΑΓΒ, ΓΒΔ égaux entr'eux ; donc la droite ΑΓ est parallèle à la droite ΒΔ (27). Mais on a démontré qu'elle lui est égale; donc, etc.

## PROPOSITION XXXIV.

Les côtés et les angles opposés des parallélogrammes sont égaux entr'eux, et la diagonale les partage en deux parties égales.

Soit le parallélogramme ΑΓΔΒ, et que ΒΓ soit sa diagonale; je dis que les côtés et les angles opposés du parallélogramme ΑΓΔΒ sont égaux entr'eux, et que la diagonale ΒΓ le partage en deux parties égales.

Car puisque ΑΒ est parallèle à ΓΔ, et que la droite ΒΓ tombe sur ces droites, les angles alternes ΑΒΓ, ΒΓΔ sont égaux entr'eux (29). De plus, puisque ΑΓ est parallèle à ΒΔ, et que ΒΓ tombe sur ces droites, les angles alternes ΑΓΒ, ΓΒΔ sont égaux entr'eux; donc les deux triangles ΑΒΓ, ΒΓΔ ont les deux angles ΑΒΓ, ΒΓΑ égaux aux deux angles ΒΓΔ, ΓΒΔ, chacun à chacun, et un côté égal à un côté, savoir, le côté commun ΒΓ, qui est adjacent aux angles égaux; ils auront donc les autres côtés égaux aux autres côtés, chacun à chacun (26), et l'angle restant égal à l'angle restant; donc le côté ΑΒ est égal au côté ΓΔ, le côté ΑΓ égal au côté ΒΔ, et l'angle ΒΑΓ égal à l'angle ΒΔΓ. Puisque l'angle ΑΒΓ est égal à l'angle ΒΓΔ, et l'angle ΓΒΔ égal à l'angle ΑΓΒ, l'angle total ΑΒΔ est égal à l'angle total ΑΓΔ. Mais on a démontré que l'angle ΒΑΓ est égal à l'angle ΓΔΒ;




Donc les côtés et les angles opposés des parallélogrammes sont égaux entr'eux.

Je dis de plus que la diagonale partage les parallélogrammes en deux parties égales. Car puisque ΑΒ est égal à ΓΔ, et que la droite ΒΓ est commune, les deux droites ΑΒ, ΒΓ sont égales aux droites ΔΓ, ΓΒ, chacune à chacune; mais l'angle ΑΒΓ est égal à l'angle ΒΓΔ; donc la base ΑΓ est égale à la base ΒΔ (4), et le triangle ΑΒΓ égal au triangle ΒΔΓ.

Donc la diagonale ΒΓ partage le parallélogramme ΑΓΔΒ en deux parties égales; ce qu'il fallait démontrer.

[...]