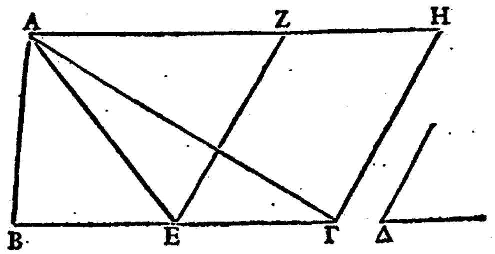
PROPOSITION XLII.

Construire, dans un angle rectiligne donné, un parallélogramme égal à un triangle donné.

Soit ABΓ le triangle donné, et Δ l'angle rectiligne donné; il faut construire un parallélogramme égal au triangle ABΓ dans l'angle rectiligne Δ.



Coupons la droite BΓ en deux parties égales en E (10), joignons AE, sur la droite EΓ, et au point E de cette droite construisons un angle ΓEZ égal à l'angle Δ (23), par le point A conduisons AH parallèle à EΓ (31), et par le point Γ conduisons ΓH parallèle à EZ; la figure ZEΓH sera un parallélogramme.

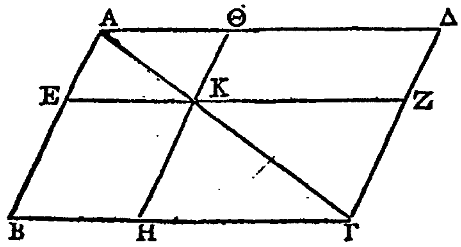
Puisque BE est égal à EΓ, le triangle ABE est égal au triangle AEΓ (38), car ils sont sur des bases égales BE, EΓ, et entre les mêmes parallèles BΓ, AH; donc le triangle ABΓ est double du triangle AEΓ. Mais le parallélogramme ZEΓH est double du triangle AEΓ (41), car il a la même base que lui, et il est dans les mêmes parallèles; donc le parallélogramme ZEΓH est égal au triangle ABΓ (not. 6), et il a l'angle ΓEZ égal à l'angle donné Δ.

Donc le parallélogramme ZEΓH a été construit égal au triangle ABΓ dans un angle qui est ΓEZ égal à l'angle donné Δ; ce qu'il fallait faire.

PROPOSITION XLIII.

Dans tout parallélogramme, les compléments des parallélogrammes, autour de la diagonale, sont égaux entr'eux.

Soit le parallélogramme ABΓΔ, que AΓ soit sa diagonale, qu'autour de AΓ soient les parallélogrammes EΘ, ZH, et les parallélogrammes BK, KΔ qu'on appelle compléments; je dis que le complément BK est égal au complément KΔ.



Car puisque ABΓΔ est un parallélogramme, et que AΓ est sa diagonale, le triangle ABΓ est égal au triangle AΓΔ (34). De plus, puisque EKΘA est un parallélogramme, et que AK est sa diagonale, le triangle AEK est égal au triangle AΘK; le triangle KZΓ est égal au triangle KHΓ, par la même raison; donc puisque le triangle AEK est égal au triangle AΘK, et le triangle KZΓ égal au triangle KHΓ, le triangle AEK, avec le triangle KHΓ, est égal au triangle AΘK avec le triangle KZΓ; mais le triangle entier ABΓ est égal au triangle entier AΔΓ; donc le complément restant BK est égal au complément restant HΔ (not. 3). Donc, etc.

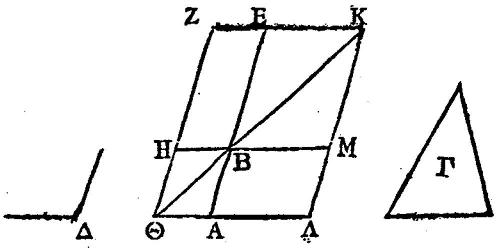
[...]

PROPOSITION XLIV.

A une droite donnée, et dans un angle rectiligne donné, appliquer un parallélogramme égal à un triangle donné.

Que AB soit la droite donnée, Γ le triangle donné, et Δ l'angle rectiligne donné; il faut sur la droite AB et dans un angle égal à Δ, appliquer un parallélogramme égal au triangle donné Γ.

Dans un angle EBH égal à l'angle Δ, construisons un parallélogramme BEZH égal au triangle Γ (42), plaçons la droite BE dans la direction de la droite BA, prolongeons la droite ZH vers Θ, par le point A conduisons AΘ parallèle à l'une ou à l'autre des droites BH, EZ (31), et joignons ΘB. Puisque la droite ΘZ tombe sur les parallèles AΘ, EZ, les angles AΘZ, ΘZE sont égaux à deux droits (29); donc les angles BΘH, HZE sont moindres que deux droits. Mais les droites prolongées à l'infini, du côté où les angles intérieurs sont moindres que deux



angles droits, se rencontrent (dém. 5); donc les droites ΘB, ZE étant prolongées, se rencontreront; qu'elles soient prolongées (dém. 2), et qu'elles se rencontrent en K; par le point K, conduisons KΛ parallèle à l'une ou à l'autre des droites EA, ZΘ (31), et prolongeons les droites ΘA, HB vers les points Λ, M.

La figure ΘΛKZ est un parallélogramme, ΘK est sa diagonale, et autour de ΘK sont les parallélogrammes AH, ME, et les parallélogrammes AB, BZ, qu'on nomme compléments; donc AB est égal à BZ (43). Mais BZ est égal au triangle Γ; donc AB est égal à Γ. Et puisque l'angle HBE est égal à l'angle ABM (15), et que l'angle HBE est égal à l'angle Δ, l'angle ABM est égal à l'angle Δ.

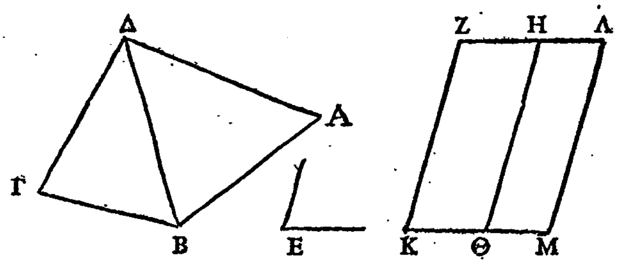
Donc à la droite donnée AB, et dans l'angle ABM égal à Δ, on a appliqué le parallélogramme AB égal au triangle donné Γ; ce qu'il fallait faire.

PROPOSITION XLV.

Construire, dans un angle rectiligne donné, un parallélogramme égal à une figure rectiligne donnée.

Soit ΑΒΓΔ la figure rectiligne donnée, et Ε l'angle rectiligne donné; il faut, dans l'angle donné Ε, construire un parallélogramme égal à la figure rectiligne ΑΒΓΔ.

Joignons ΔΒ, et construisons dans l'angle ΘΚΖ égal à l'angle Ε, le parallélogramme ΖΘ égal au triangle ΑΒΔ (42), et à la droite ΗΘ appliquons dans l'angle ΗΘΜ égal à l'angle Ε, le parallélogramme ΗΜ égal au triangle ΔΒΓ.



Puisque l'angle Ε est égal à chacun des angles ΘΚΖ, ΗΘΜ, l'angle ΘΚΖ est égal à l'angle ΗΘΜ; ajoutons-leur l'angle commun ΚΘΗ; les angles ΖΚΘ, ΚΘΗ seront égaux aux angles ΚΘΗ, ΗΘΜ. Mais les angles ΖΚΘ, ΚΘΗ sont égaux à deux droits (29); donc les angles ΚΘΗ, ΗΘΜ sont égaux à deux droits. Donc les deux droites ΘΚ, ΘΜ, non placées du même côté, font avec la droite ΗΘ, et au point Θ de cette droite, deux angles de suite égaux à deux droits; donc la droite ΚΘ est dans la direction de la droite ΘΜ (14). Et puisque la droite ΘΗ tombe sur les parallèles ΚΜ, ΖΗ, les angles alternes ΜΘΗ, ΘΗΖ sont égaux entr'eux (29). Ajoutons-leur l'angle commun ΘΗΛ; les angles ΜΘΗ, ΘΗΛ seront égaux aux angles ΘΗΖ, ΘΗΛ. Mais les angles ΜΘΗ, ΘΗΛ sont égaux à deux droits (29); donc les angles ΘΗΖ, ΘΗΛ sont aussi égaux à deux droits; donc la droite ΖΗ est dans la direction de la droite ΗΛ; mais ΚΖ est égal et parallèle à ΘΗ, et ΘΗ égal et parallèle à ΜΛ; donc la droite ΚΖ est égale et parallèle à ΜΛ (not. 1 et 30); mais ces deux droites sont jointes par les droites ΚΜ, ΖΛ, et les droites ΚΜ, ΖΛ sont égales et parallèles (33); donc

KZAM est un parallélogramme. Mais le triangle ABΔ est égal au parallélogramme ZΘ, et le triangle ΔBΓ est égal au parallélogramme HM; donc la figure rectiligne entière ABΓΔ est égale au parallélogramme entier KZAM.

Donc le parallélogramme KZAM a été construit égal à la figure rectiligne donnée ABΓΔ, dans l'angle ZKM égal à l'angle donné E; ce qu'il fallait faire.

[...]