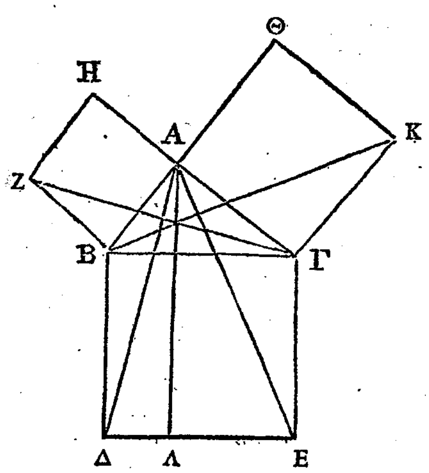
PROPOSITION XLVII.

Dans les triangles rectangles, le quarré du côté opposé à l'angle droit est égal aux quarrés des côtés qui comprennent l'angle droit.

Soit ABΓ un triangle rectangle, que BAΓ soit l'angle droit; je dis que le quarré du côté BΓ est égal aux quarrés des côtés BA, AΓ.

Décrivons avec BΓ le quarré BΔEΓ, et avec BA, AΓ les quarrés HB, ΘΓ; et par le point A conduisons AΛ parallèle à l'une ou à l'autre des droites BΔ, ΓE; et joignons AΔ, ZΓ.



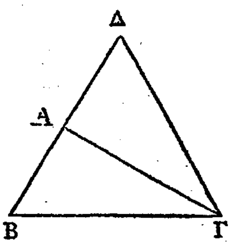
Puisque chacun des angles BAΓ, BAH est droit, les deux droites AΓ, AH, non placées du même côté, font avec la droite BA au point A de cette droite, deux angles de suite égaux à deux droits; donc la droite ΓA est dans la direction de AH; la droite BA est dans la direction AΘ, par la même raison. Et puisque l'angle ΔBΓ est égal à l'angle ZBA, étant droits l'un et l'autre, si nous leur ajoutons l'angle commun ABΓ, l'angle entier ΔBA sera égal à l'angle entier ZBΓ (not. 4). Et puisque ΔB est égal à BΓ, et ZB à BA, les deux droites ΔB, ΔA sont égales aux deux droites ΓB, BZ, chacune à chacune; mais l'angle ΔBA est égal à l'angle ZBΓ; donc la base AΔ est égale à la base ZΓ, et le triangle ABΔ égal au triangle ZBΓ (4). Mais le parallélogramme BΛ est double du triangle ABΔ (41), car ils ont la même base BΔ et ils sont entre les mêmes parallèles BΔ, AΛ; le quarré BH est double du triangle ZBΓ, car ils ont la même base BZ et ils sont entre les mêmes parallèles ZB, HΓ; et les grandeurs qui sont doubles de grandeurs égales, sont égales entr'elles; donc le parallélograme BΛ est égal au quarré HB. Ayant joint AE, BK, nous démontrerons semblablement que le parallélogramme ΓΛ est égal au quarré ΘΓ; donc le quarré entier BΔEΓ est égal aux deux quarrés HB, ΘΓ. Mais le quarré BΔEΓ est décrit avec BΓ, et les quarrés HB, ΘΓ sont décrits avec BA, AΓ; donc le quarré du coté BΓ est égal aux quarrés des côtés BA, AΓ. Donc dans les triangles, etc.

PROPOSITION XLVIII.

Si le quarré d'un des côtés d'un triangle est égal aux quarrés des deux côtés restants de ce triangle, l'angle compris par les deux côtés restants est droit.

Que le quarré du côté BΓ du triangle ABΓ soit égal aux quarrés des côtés BA, AΓ; je dis que l'angle BAΓ est droit.

Du point A, conduisons la droite AΔ perpendiculaire à AΓ (11), faisons AΔ égal à BA, et joignons ΔΓ.



Car puisque ΔA est égal à AB, le quarré de ΔA est égal au quarré de AB. Ajoutons le quarré commun de AΓ; les quarrés des droites ΔA, AΓ seront égaux aux quarrés des droites BA, AΓ. Mais le quarré de ΔΓ est égal aux quarrés des droits ΔA, AΓ (47), car l'angle ΔAΓ est droit, et le quarré de BΓ est supposé égal aux quarrés des droites BA, AΓ; donc le quarré de ΔΓ est égal au quarré de BΓ; donc le côté ΔΓ est égal au côté BΓ; mais AΔ est égal à AB, et AΓ est commun; donc les deux droites ΔA, AΓ sont égales aux deux droites BA, AΓ; mais la base ΔΓ est égale à la base BΓ; donc l'angle ΔAΓ est égal à l'angle BAΓ (8). Mais l'angle ΔAΓ est droit; donc l'angle BAΓ est droit aussi. Donc, etc.

FIN DU PREMIER LIVRE.