PROPOSITION VI.

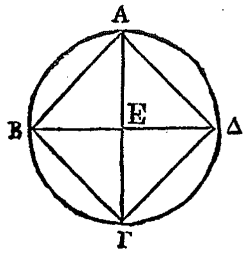
Inscrire un quarré dans un cercle donné.

Soit ΑΒΓΔ le cercle donné; il faut inscrire un quarré dans le cercle ΑΒΓΔ.

Menons les diamètres ΑΓ, ΒΔ du cercle ΑΒΓΔ perpendiculaires l'un à l'autre (11. 1), et joignons ΑΒ, ΒΓ, ΓΔ, ΔΑ.

Puisque ΒΕ est égal à ΕΔ, car le point Ε est le centre, et que la droite ΕΑ est commune et à angles droits, la base ΑΒ est égale à la base ΑΔ (4. 1).

Par la même raison, chacune des droites ΒΓ, ΓΔ est égale à chacune des droites ΒΑ, ΑΔ; donc le quadrilatère ΑΒΓΔ est équilatéral. Je dis aussi qu'il est rectangle. Car puisque la droite ΒΔ est un diamètre du cercle ΑΒΓΔ, la figure ΒΑΔ est un demi-cercle. Donc l'angle ΒΑΔ est droit (31. 1). Par la



même raison, chacun des angles ΑΒΓ, ΒΓΔ, ΓΔΑ est droit aussi; donc le quadrilatère ΑΒΓΔ est rectangle. Mais on a démontré qu'il est équilatéral; donc ce quadrilatère est un quarré. Et ce quarré est inscrit dans le cercle ΑΒΓΔ.

Donc on a inscrit le quarré ΑΒΓΔ dans le cercle donné ΑΒΓΔ. Ce qu'il fallait faire.

[...]

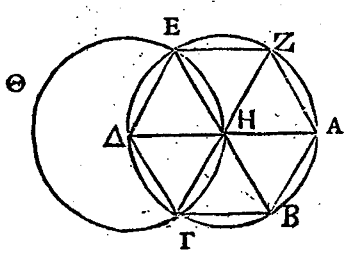
PROPOSITION XV.

Inscrire dans un cercle donné un hexagone équilatéral et équiangle.

Soit ΑΒΓΔΕΖ le cercle donné; il faut dans ce cercle inscrire un hexagone équilatéral et équiangle.

Menons le diamètre ΑΔ du cercle ΑΒΓΔΕΖ, prenons le centre Η de ce cercle, du centre Δ, et de l'intervalle ΔΗ décrivons le cercle ΕΗΓΘ (dém. 3), joignons les droites ΕΗ, ΓΗ, prolongeons-les vers les points Β, Ζ, et joignons ΑΒ, ΒΓ, ΓΔ, ΔΕ, ΕΖ, ΖΑ; je dis que l'hexagone ΑΒΓΔΕΖ est équilatéral et équiangle.

Puisque le point Η est le centre du cercle ΑΒΓΔΕΖ, la droite ΗΕ est égale à ΗΔ. De plus, puisque le point Δ est le centre du cercle ΕΗΓΘ, la droite ΔΕ est égale à ΔΗ. Mais on a démontré que ΗΕ est égal à ΗΔ; donc ΗΕ est égal à ΕΔ; donc le triangle ΕΗΔ est équilatéral; donc les trois angles ΕΗΔ, ΗΔΕ, ΔΕΗ sont égaux entr'eux, puisque dans les triangles isocèles, les angles à la base sont égaux entr'eux (5. 1). Mais les trois angles d'un triangle sont égaux à deux droits (32. 1); donc l'angle ΕΗΔ est le tiers de deux droits. Nous démontrerons semblablement que ΔΗΓ est le tiers de deux droits. Mais la droite ΓΗ tombant sur la droite ΕΒ fait les angles de suite ΕΗΓ, ΓΗΒ égaux à deux droits (13. 1); donc l'angle restant ΓΗΒ est le tiers de deux droits;



donc les angles ΕΗΔ, ΔΗΓ, ΓΗΒ sont égaux entr'eux; mais les angles ΒΗΑ, ΑΗΖ, ΖΗΕ sont égaux aux angles ΕΗΔ, ΔΗΓ, ΓΗΒ, parce que ces angles sont opposés par le sommet (15. 1), donc les six angles ΕΗΔ, ΔΗΓ, ΓΗΒ, ΒΗΑ, ΑΗΖ, ΖΗΕ sont égaux entr'eux. Mais des angles égaux s'appuient sur des arcs égaux (26. 3); donc les six arcs ΑΒ, ΒΓ, ΓΔ, ΔΕ, ΕΖ, ΖΑ sont égaux entr'eux. Mais des arcs égaux sont soutendus par des droites égales (29. 3); donc ces six droites sont égales entr'elles; donc l'hexagone ΑΒΓΔΕΖ est équilatéral. Je dis qu'il est équiangle. Car puisque l'arc ΖΑ est égal à l'arc ΕΔ, ajoutons l'arc commun ΑΒΓΔ, l'arc entier ΖΑΒΓΔ sera égal à l'arc entier ΕΔΓΒΑ. Mais l'angle ΖΕΔ s'appuie sur l'arc ΖΑΒΓΔ, et l'angle ΑΖΕ s'appuie sur l'arc ΕΔΓΒΑ; donc l'angle ΑΖΕ est égal à l'angle ΖΕΔ (27. 3). On démontrera semblablement que les angles restants de l'hexagone ΑΒΓΔΕΖ sont égaux un à un à l'un et à l'autre des angles ΑΖΕ, ΖΕΔ; donc l'hexagone ΑΒΓΔΕΖ est équiangle. Mais on a démontré qu'il est équilatéral, et il est inscrit dans le cercle ΑΒΓΔΕΖ.

Donc on a inscrit un hexagone équilatéral et équiangle dans le cercle donné. Ce qu'il fallait faire.

COROLLAIRE.

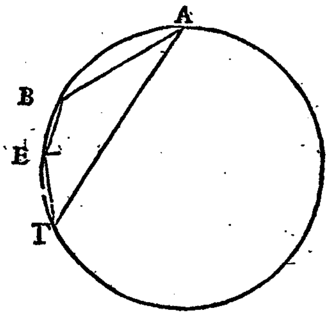
De là il est évident que le côté de l'hexagone est égal au rayon du cercle.

Semblablement si par les points A, B, Δ, Γ, E, Z nous menons des tangentes au cercle, on circonscrira à ce cercle un hexagone équilatéral et équiangle, conformément à ce qui a été dit pour le pentagone. C'est aussi conformément à ce qui a été dit pour le pentagone, que nous inscrirons, et que nous circonscrirons un cercle à un hexagone donné.

PROPOSITION XVI.

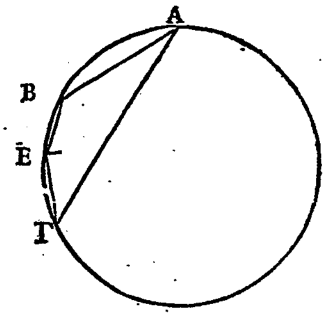
Inscrire dans un cercle donné un quindécagone équilatéral et équiangle.

Soit ABΓΔ le cercle donné; il faut dans ce cercle inscrire un quindécagone équilatéral et équiangle.



Inscrivons dans le cercle ABΓΔ le côté AΓ d'un triangle équilatéral inscrit, et le côté AB d'un pentagone équilatéral. Puisque la circonférence entière ABΓΔ doit être partagée en quinze parties égales, l'arc ABΓ qui est la troisième partie de la circonférence, en contiendra cinq, et l'arc AB qui est le cinquième de la circonférence, en contiendra trois; donc l'arc restant BΓ en contiendra deux. Partageons l'arc restant BΓ en deux parties égales au point E (30. 3), chacun des arcs BE, EΓ sera la quinzième partie de la circonférence du cercle

ABΓΔ. Donc, si ayant joint les droites BE, EΓ, nous adaptons dans le cercle ABΓΔ, à la suite les unes des autres, des droites égales à ces droites (1. 4), on aura inscrit dans ce cercle un quindécagone équilatéral et équiangle. Ce qu'il fallait faire.



[...]

FIN DU QUATRIÈME LIVRE.