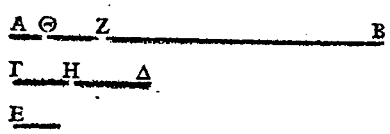
[...]

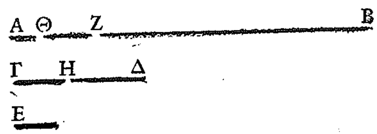
PROPOSITION PREMIÈRE.

Deux nombres inégaux étant proposés, le plus petit étant toujours retranché du plus grand, si le reste ne mesure celui qui est avant lui que lorsque l'on a pris l'unité, les nombres proposés seront premiers entr'eux.



Soient les deux nombres inégaux ΑΒ, ΓΔ; que le plus petit étant toujours retranché du plus grand, le nombre restant ne mesure celui qui est avant lui que lorsque l'on a pris l'unité; je dis que les nombres ΑΒ, ΓΔ sont premiers entr'eux, c'est-à-dire que l'unité seule les mesure.

Car si les nombres AB, ΓΔ ne sont pas premiers entr'eux, quelque nombre les mesurera. Que quelque nombre les mesure, et que ce soit E; que ΓΔ mesurant AB laisse ZA plus petit que lui-même; que ZA mesurant ΔΓ laisse HΓ plus petit que lui-même; et qu'enfin HΓ mesurant ZA laisse l'unité ΘA.

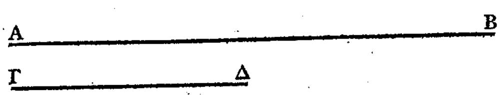


Puisque E mesure ΓΔ, et que ΓΔ mesure ZB, le nombre E mesure ZB. Mais il mesure AB tout entier; donc il mesurera le reste AZ. Mais AZ mesure ΔH; donc E mesurera ΔH. Mais il mesure ΓΔ tout entier; donc il mesurera le reste ΓH. Mais ΓH mesure ZΘ; donc E mesurera ZΘ. Mais il mesure ZA tout entier; donc un nombre mesurera l'unité restante AΘ, ce qui est impossible (déf. 3. 7). Donc, aucun nombre ne mesurera les nombres AB, ΓΔ. Donc les nombres AB, ΓΔ sont premiers entr'eux. Ce qu'il fallait démontrer.

PROPOSITION II.

Deux nombres non premiers entr'eux étant donnés, trouver leur plus grande commune mesure.

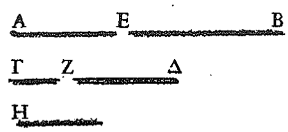
Soient donnés les deux nombres AB, ΓΔ non premiers entr'eux, et que ΓΔ soit le plus petit; il faut trouver la plus grande commune mesure des nombres AB, ΓΔ.



Si ΓΔ mesure AB, le nombre ΓΔ sera une commune mesure des nombres ΓΔ, AB, parce que ΓΔ se mesure lui-même; et il est évident qu'il en sera la plus grande, car aucun nombre plus grand que ΓΔ ne peut mesurer ΓΔ.

Mais si ΓΔ ne mesure pas AB, et si on retranche toujours le plus petit des nombres AB, ΓΔ du plus grand, il restera quelque nombre qui mesurera celui qui est avant lui. On n'aura pas l'unité pour reste; car si cela était, les nombres AB, ΓΔ seraient premiers entr'eux, ce qui n'est pas supposé;

il restera donc quelque nombre qui mesurera celui qui est avant lui. Que ΓΔ mesurant AB laisse EA plus petit que lui-même ; que EA mesurant ΔΓ laisse ZΓ plus petit que lui-même ; et enfin que ΓZ mesure EA. Puisque ΓZ



mesure AE, et que AE mesure ΔZ, le nombre ΓZ mesurera ΔZ. Mais il se mesure lui-même ; donc il mesurera ΓΔ tout entier. Mais ΓΔ mesure BE ; donc ΓZ mesure BE. Mais il mesure EA ; donc il mesurera BA tout entier. Mais il mesure ΓΔ ; donc ΓZ mesure AB et ΓΔ ; donc ΓZ est une commune mesure des nombres AB, ΓΔ. Je dis qu'il en est la plus grande. Car si ΓZ n'est pas la plus grande commune mesure des nombres AB, ΓΔ, quelque nombre plus grand que ΓZ mesurera les nombres AB, ΓΔ. Qu'un nombre plus grand les mesure, et que ce soit H. Puisque H mesure ΓΔ, et que ΓΔ mesure BE, le nombre H mesurera BE. Mais il mesure BA tout entier ; donc il mesurera le reste AE. Mais AE mesure ΔZ ; donc H mesure ΔZ. Mais il mesure ΔΓ tout entier ; donc il mesurera le reste ΓZ, le plus grand le plus petit, ce qui est impossible ; donc quelque nombre plus grand que ΓZ ne mesurera pas les nombres AB, ΓΔ ; donc ΓZ est la plus grande commune mesure des nombres AB, ΓΔ. Ce qu'il fallait démontrer.