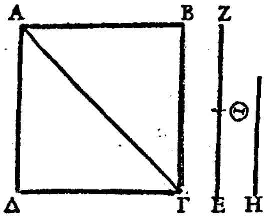
[...]

PROPOSITION CXVII.

Qu'il nous soit proposé de démontrer que dans les figures quarrées la diagonale est incommensurable en longueur avec le côté.

Soit le quarré ΑΒΓΔ, et que ΑΓ soit sa diagonale; je dis que la droite ΑΓ est incommensurable en longueur avec ΑΒ.



Qu'elle lui soit commensurable, si cela est possible; je dis qu'il s'en suivrait qu'un même nombre serait pair et impair. Or, il est évident que le quarré de ΑΓ est double du quarré de ΑΒ (47. 10); mais ΑΓ est commensurable avec ΑΒ; la droite ΑΓ a donc avec la droite ΑΒ la raison qu'un nombre a avec un nombre (6. 10). Que ΑΓ ait avec ΑΒ la raison que le nombre ΕΖ a avec le nombre Η, et que les nombres ΕΖ, Η soient les plus petits de ceux qui ont la même raison avec eux;

le nombre EZ ne sera pas l'unité. Car si EZ était l'unité, à cause que EZ a avec H la raison que AΓ a avec AB, et que AΓ est plus grand que AB, l'unité EZ serait plus grande que le nombre H, ce qui est absurde; EZ n'est donc pas l'unité; EZ est donc un nombre. Et puisque ΓA est à AB comme EZ est à H, le quarré de ΓA sera au quarré de AB comme le quarré de EZ est au quarré de H. Mais le quarré de ΓA est double du quarré de AB; le quarré de EZ est donc double du quarré de H; le quarré du nombre EZ est donc pair. Le nombre EZ est donc pair; car s'il était impair, son quarré serait impair; parce que si l'on ajoute tant de nombres impairs que l'on voudra, leur quantité étant impaire, leur somme est un nombre impair (23. 9); le nombre EZ est donc un nombre pair. Partageons le nombre EZ en deux parties égales en Θ. Puisque les nombres EZ, H sont les plus petits de ceux qui ont la même raison avec eux, ces nombres seront premiers entr'eux. Mais le nombre EZ est pair; le nombre H est donc impair. Car s'il était pair, les nombres EZ, H, qui sont premiers entr'eux, seraient mesurés par deux; parce que tout nombre pair a une partie qui en est la moitié, ce qui est impossible. Le nombre H n'est donc pas un nombre pair; il est donc impair. Mais EZ est double de EΘ; le quarré de EZ est donc quadruple du quarré de EΘ (11. 8). Mais le quarré de EZ est double du quarré de H; le quarré de H est donc double du quarré de EΘ; le quarré de H est donc pair; le nombre H est donc pair, d'après ce qui a été dit (29. 9). Mais il est aussi impair, ce qui est impossible; la droite AΓ n'est donc pas commensurable en longueur avec AB; elle lui est donc incommensurable. Ce qu'il fallait démontrer.

[...]