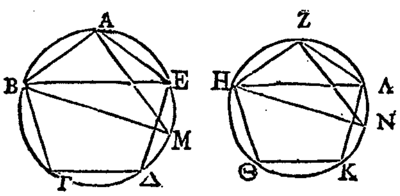
LE DOUZIÈME LIVRE

DES ÉLÉMENTS D'EUCLIDE.

PROPOSITION I.

Les polygones semblables inscrits dans des cercles sont entr'eux comme les quarrés des diamètres.

Soient les cercles ΑΒΓΔΕ, ΖΗΘΚΛ; soient dans ces cercles les polygones semblables ΑΒΓΔΕ, ΖΗΘΚΛ, et que les diamètres de ces cercles soient ΒΜ, ΗΝ; je dis que le quarré de ΒΜ est au quarré de ΗΝ comme le polygone ΑΒΓΔΕ est au polygone ΖΗΘΚΛ.

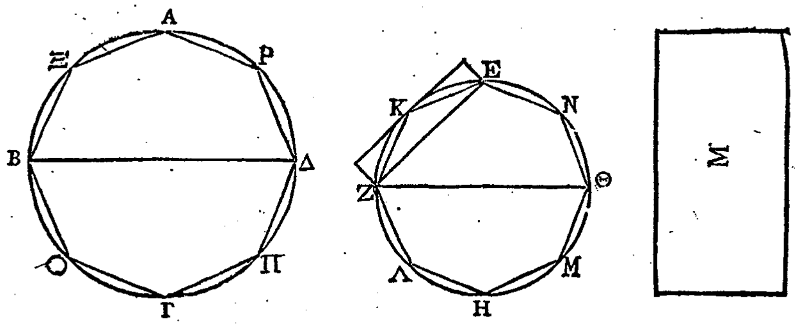


Car joignons ΒΕ, ΑΜ, ΗΛ, ΖΝ. Puisque le polygone ΑΒΓΔΕ est semblable au polygone ΖΗΘΚΛ, que l'angle ΒΑΕ est égal à l'angle ΗΖΛ (déf. 1. 6), et que ΒΑ est à ΑΕ comme ΗΖ est à ΖΛ, les deux triangles ΒΑΕ, ΗΖΛ ont un angle égal à un angle; savoir, l'angle ΒΑΕ égal à l'angle ΗΖΛ, et les côtés, placés autour de ces angles, proportionnels; les triangles ΑΒΕ, ΖΗΛ sont donc équiangles (6. 6); l'angle ΑΕΒ est donc égal à l'angle ΖΛΗ. Mais l'angle ΑΕΒ est égal à l'angle ΑΜΒ (21. 3), car ces angles sont appuyés sur le même arc, et l'angle ΖΛΗ est aussi égal à l'angle ΖΝΗ; l'angle ΑΜΒ est donc égal à l'angle ΖΝΗ. Mais l'angle droit ΒΑΜ est égal à l'angle droit ΗΖΝ (31. 3); l'angle restant est donc égal à l'angle restant; les deux triangles ΑΒΜ, ΖΗΝ sont donc équiangles; ΒΜ est donc à ΗΝ comme ΒΑ est à ΗΖ (4. 6). Mais la raison du quarré de ΒΜ au quarré de ΗΝ est double de la raison ΒΜ à ΗΝ (20. 6), et la raison du polygone ΑΒΓΔΕ au polygone ΖΗΘΚΛ est double de la raison de ΒΑ à ΗΖ; le quarré de ΒΜ est donc au quarré de ΗΝ comme le polygone ΑΒΓΔΕ est au polygone ΖΗΘΚΛ (11. 5). Donc, etc.

PROPOSITION II.

Les cercles sont entr'eux comme les quarrés de leurs diamètres.

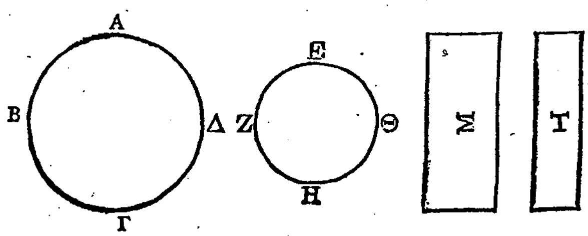
Soient les cercles ΑΒΓΔ, ΕΖΗΘ, et que leurs diamètres soient ΒΔ, ΖΘ; je dis que le quarré de ΒΔ est au quarré de ΖΘ comme le cercle ΑΒΓΔ est au cercle ΕΖΗΘ.



Car si le quarré de ΒΔ n'est pas au quarré de ΖΘ comme le cercle ΑΒΓΔ est au cercle ΕΖΗΘ, le quarré ΒΔ sera au quarré de ΖΘ comme le cercle ΑΒΓΔ est à une surface plus grande ou à une surface plus petite que le cercle ΕΖΗΘ. Que ce soit d'abord à une surface Σ plus petite. Dans le cercle ΕΖΗΘ décrivons le quarré ΕΖΗΘ; le quarré décrit sera plus grand que la moitié du cercle ΕΖΗΘ, parce que, si par les points Ε, Ζ, Η, Θ nous menons des tangentes à ce cercle, le quarré ΕΖΗΘ sera la moitié du quarré circonscrit au cercle (47. 11 et 31. 3). Mais le cercle est plus petit que le quarré circonscrit; le quarré inscrit ΕΖΗΘ est donc plus grand que la moitié du cercle ΕΖΗΘ. Partageons les arcs ΕΖ, ΖΗ, ΗΘ, ΘΕ en deux parties égales aux points Κ, Λ, Μ, Ν, et joignons ΕΚ, ΚΖ, ΖΛ, ΛΗ, ΗΜ, ΜΘ, ΘΝ, ΝΕ. Chacun des triangles ΕΚΖ, ΖΛΗ, ΜΗΘ, ΘΝΕ est donc plus grand que la moitié du segment dans lequel il est placé; parce que si par les points Κ, Λ, Μ, Ν nous menons des tangentes au cercle, et si sur les droites ΕΖ, ΖΗ, ΗΘ, ΘΕ nous construisons des parallélogrammes, chacun des triangles ΕΚΖ, ΖΛΗ, ΗΜΘ, ΘΝΕ sera la moitié du parallélogramme dans lequel il est placé (37. 1). Mais un segment est plus petit que le parallélogramme où il est placé; chacun des triangles ΕΚΖ, ΖΛΗ, ΗΜΘ, ΘΝΕ est donc plus grand que la moitié du segment dans lequel il est placé. Si nous partageons les arcs restants en deux parties égales; si nous joignons leurs extrémités par des droites, et si nous continuons toujours de faire la même chose, il nous restera certains segments de cercles dont la somme sera moindre que l'excès du cercle EZHΘ sur la surface Σ; car nous avons démontré dans le premier théorème du dixième livre que, deux grandeurs inégales étant données, si l'on retranche de la plus grande une partie plus grande que sa moitié, du reste une partie plus grande que sa moitié, et si l'on continue toujours de faire la même chose, il reste enfin une certaine grandeur qui sera plus petite que la plus petite des grandeurs exposées. Qu'on ait ce reste, et que ce soient les segments du cercle EZHΘ placés sur les droites EK, KZ, ZΛ, ΛH, HM, MΘ, ΘN, NE, et qu'ils soient plus petits que l'excès du cercle EZHΘ sur la surface Σ; le polygone restant EKZΛHMΘN sera plus grand que la surface Σ. Décrivons dans le cercle ABΓΔ un polygone AΞBOΓΠΔP semblable au polygone EKZHNMΘN; le quarré de BΔ sera au quarré de ZΘ comme le polygone AΞBOΓΠΔP est au polygone EKZΛHMΘN (1. 12). Mais le quarré de BΔ est au quarré de ZΘ comme le cercle ABΓΔ est à la surface Σ; le cercle ABΓΔ est donc à la surface Σ comme le polygone AΞBOΓΠΔP est au polygone EKZΛHMΘN; donc, par permutation, le cercle ABΓΔ est au polygone qui lui est inscrit comme la surface Σ est au polygone EKZΛHMΘN. Mais le cercle ABΓΔ est plus grand que le polygone qui lui est inscrit; la surface Σ est donc plus grande que le polygone EKZΛHMΘN. Mais il est aussi plus petit, ce qui est impossible; le quarré de BΔ n'est donc point au quarré de ZΘ comme le cercle ABΓΔ est à une surface plus petite que le cercle EZHΘ. Nous démontrerons semblablement que le quarré de ZΘ n'est point au quarré de BΔ comme le cercle EZHΘ est à une surface plus petite que le cercle ABΓΔ. Je dis ensuite que le quarré de BΔ n'est point au quarré de ZΘ comme le cercle ABΓΔ est à une surface plus grande que le cercle EZHΘ. Car si cela est possible, que le quarré de BΔ soit au quarré de ZΘ comme le cercle ABΓΔ est à une surface Σ plus grande. Par inversion, le quarré de ZΘ sera au quarré de BΔ comme la surface Σ est au cercle ABΓΔ. Mais la surface Σ est au cercle ABΓΔ comme le cercle EZHΘ est à une surface plus petite que le cercle ABΓΔ; le quarré de ZΘ est donc au quarré de BΔ comme le cercle EZHΘ est à une surface plus petite que le cercle ABΓΔ, ce qui a été démontré impossible; le quarré de BΔ n'est donc pas au quarré de ZΘ comme le cercle ABΓΔ est à une surface plus grande que le cercle EZHΘ. Mais on a démontré que le quarré de BΔ n'est point au quarré de ZΘ comme le cercle ABΓΔ est à une surface plus petite que le cercle EZHΘ; le quarré de BΔ est donc au quarré de ZΘ comme le cercle ABΓΔ est au cercle EZHΘ. Donc, etc.

LEMME.

Je dis que si la surface Σ est plus grande que le cercle EZHΘ, la surface Σ sera au cercle ABΓΔ comme le cercle EZHΘ est à une surface plus petite que le cercle ABΓΔ.



Car que la surface Σ soit au cercle ABΓΔ comme le cercle EZHΘ est à une surface T; je dis que la surface T est plus petite que le cercle ABΓΔ. Car puisque la surface Σ est au cercle ABΓΔ comme le cercle EZHΘ est à la surface T, par permutation, la surface Σ sera au cercle EZHΘ comme le cercle ABΓΔ est à la surface T (16. 5). Mais la surface Σ est plus grande que le cercle EZHΘ; le cercle ABΓΔ est donc plus grand que la surface T; la surface Σ est donc au cercle ABΓΔ comme le cercle EZHΘ est à une surface plus petite que le cercle ABΓΔ. Ce qu'il fallait démontrer.

[...]