Leonhard Euler, « Remarques sur les mémoires précédents de M. Bernoulli », *HAB pour l'année 1753*, 1755, p. 214-217.

équation; ce qu'il feroit aussi aisé de prouver indépendamment de l'analyse, que je viens de déveloper. Or, ce qui est le principal, ces deux courbes appliquées de la maniere enseignée, satisfont également, soit qu'elles soient exprimibles par quelque équation, ou qu'elles soient tracées d'une maniere quelconque, de sorte qu'elles ne puissent être assujetties à aucune équation. Le Lecteur est prié de réfléchir bien sur cette circonstance, qui contient le fondement de l'universalité de ma solution, contestée par M. d'*Alembert*.

XXXI. Mais voyons maintenant, de quelle condition doivent être ces deux courbes, ou la nature des deux fonctions Φ & Ψ, afin que les premieres propriétés de la corde soient maintenues. Or d'abord il faut, que posant $x = 0$, l'appliquée y evanouïsse toûjours, de quelque durée que soit le tems t: soit donc $x = 0$, & il faut qu'il soit:

$$\Phi(ct) + \Psi(-ct) = 0 \quad \text{ou} \quad \Psi(-ct) = -\Phi(ct)$$

d'où l'on voit que la fonction exprimée par Ψ est égale à celle qui est exprimée par Φ, & que prenant les abscisses négatitives, les appliqueés deviennent aussi négatives en conservant les mêmes valeurs. Les deux courbes ES & FT se réduisent donc à une seule courbe, qui doit être telle, qu'aux abscisses négatives réponde une branche semblable à celle qui répond aux abscisses positives; mais qu'elle tombe de l'autre côté de l'axe. Si donc Φ marque une telle fonction, que j'ai nommée autrefois impaire, puisqu'elle ne contient que des puissances impaires de la quantité, dont elle est fonction, notre équation sera: $y = \Phi(x+ct) + \Phi(x-ct)$.

XXXII. L'autre condition exige, que posant $x = a$, la valeur de y evanouïsse également, quelque quantité que puisse avoir le tems t: il faut donc qu'il soit: $\Phi(a+ct) + \Phi(a-ct) = 0$.

La courbe doit donc être telle, que si l'on prend l'abscisse $= a$, & & qu'on y ajoute, ou en retranche la même quantité quelconque, les appliquées, qui répondent à deux telles abscisses soyent égales, mais affec-

affectées de divers signes. Cette courbe aura donc non seulement autour du point, où est pris le commencement des abscisses, des branches alternativement semblables, mais aussi autour du point, où se termine l'abscisse $= a$. De là il s'ensuit, comme j'ai fait voir, qu'elle doit avoir une infinité de tels points éloignés entr'eux du même intervalle $= a$, auprès desquels les branches de la courbe soyent de part & d'autre alternativement semblables.

XXXIII. Si l'on examine plus exactement les raisons, sur lesquelles je viens de fonder l'identité des fonctions Φ & Ψ, & qu'on fasse surtout attention, que les deux courbes ne sont assujetties à aucune loi, on s'appercevra aisément, que l'égalité $\Psi(-ct) = -\Phi(ct)$ pourroit aussi avoir lieu, sans que les deux fonctions fussent égales. Mais il faut encore avoir égard à une autre circonstance renfermée dans la proposition du problème, qui exige absolument cette égalité des deux fonctions. On supposé que la courbe commence son mouvement du repos; donc il faut que, posant le tems $t = 0$, la vitesse de chaque point de la corde, qui est exprimée par $\left(\frac{dy}{dt}\right)$ evanouïsse. Or ayant trouvé $y = \Phi(x + ct) + \Psi(x - ct)$, la différentiation fournit

$$\left(\frac{dy}{dt}\right) = c\,\Phi'(x + ct) - c\,\Psi'(x - ct).$$

Posons donc $t = 0$, & il faut qu'il soit $\Phi'(x) = \Psi'(x)$, d'où l'identité des fonctions Φ' & Ψ' & partant aussi des fonctions Φ & Ψ s'ensuit ouvertement. Nous n'avons donc qu'une seule courbe, qui nous servira de régle pour déterminer le mouvement de la corde.

XXXIV. Cette courbe doit donc être telle, comme elle est présentée dans la troisième figure: si AB représente la longueur de la corde $= a$, la courbe ADB s'étendra de l'un & l'autre coté à l'infini, en sorte que la portion AD'B' soit égale & semblable à la courbe ADB, & de l'autre côté de même la branche B'D'A soit égale & sem- Fig. 3.

sem-

ſemblable à la branche BDA. Or la courbe ADB eſt abſolument arbitraire, comme j'ai déjà fait voir; & il n'importe ſi elle eſt réguliere, ou compriſe dans quelque équation, ou ſi elle eſt irréguliere, ou tracée d'une maniere quelconque. Ayant donc décrit une telle courbe ADB quelconque, qui paſſe par les points A & B, on n'a qu'à réïterer la deſcription de la même courbe à l'infini, tant vers la droite que vers la gauche, en la poſant alternativement au deſſus & au deſſous de l'axe, de ſorte que partout les bouts ſemblables ſoient joints enſemble; ainſi en A on joigne la même courbe ADB par le bout A, & en B par le bout B, tout comme j'en ai enſeigné la conſtruction dans mon Mémoire ſur cette matiere.

XXXV. Ayant donc décrit une telle courbe quelconque, elle nous découvrira toujours un mouvement, dont la corde eſt ſuſceptible. Car poſant $t = 0$, nous en connoitrons d'abord la figure, que la corde doit avoir au commencement, pour que ce mouvement s'enſuive. Puisque nous avons pour un tems quelconque t,

$$y = n\,\Phi(x + ct) + n\,\Phi(x - ct)$$

prenant pour n une fraction aſſés petite, afin que les appliquées dans la figure de la corde demeurent toujours quaſi infiniment petites, nous en tirerons pour la figure initiale de la corde cette équation:

$$y = n\,\Phi(x) + n\,\Phi(x) = 2\,n\,\Phi(x)$$

c'eſt à dire, prenant ſur notre courbe l'abſciſſe $AP = x$, l'appliquée PM priſe $2n$ fois nous donnera l'appliquée pour la figure initiale de la corde, qui convient à l'abſciſſe x. Donc, ſi les appliquées de la courbe AMB ſont aſſés petites, on pourra prendre $n = \frac{1}{2}$, & la figure arbitraire ADB elle-même repréſentera la figure initiale de la corde.

XXXVI. Réciproquement donc, dès qu'on connoit la figure initiale, qu'on aura donnée à la corde avant que de la relâcher, rien ne ſera plus aiſé que de décrire notre courbe infinie B′D′ADB′D &c. qui nous

nous fera connoitre le mouvement, que la corde pourſuivra. On tracera la courbe AMDB, égale & ſemblable à la figure initiale de la corde, & on en réïtérera la conſtruction, tant vers la gauche au delà du point A, que vers la droite au delà du point B, alternativement au dessus & au deſſous de l'axe, en ſorte que partout les bouts qu'on a joints enſemble ſoient les mêmes. Cette conſtruction a toujours lieu, de quelque nature que ſoit la figure initiale propoſée de la courbe, & il ne s'agit ici que de la portion ADB; laquelle quand elle-même auroit d'autres continuations de part & d'autre en vertu de ſa nature, elles n'entrent en aucune conſidération. Ainſi, ſi la figure ADB étoit un arc de cercle, ſans ſe ſoucier de la continuation naturelle du cercle, on répétera la deſcription de ce même arc de cercle ADB à l'infini alternativement au deſſus & au deſſous de l'axe; & la même régle a toujours lieu, de quelque nature que puiſſe être la figure initiale de la corde.

XXXVII. Les différentes parties ſemblables de cette courbe ne ſont donc liées entr'elles par aucune loi de continuité, & ce n'eſt que par la deſcription, qu'elles ſont jointes enſemble. Par cette raiſon il eſt impoſſible, que toute cette courbe ſoit compriſe dans quelque équation, à moins que par hazard la figure ADB ne ſoit telle, que ſa continuation naturelle entraine toutes les autres parties réïtérées; & c'eſt le cas, où la figure ADB eſt la trochoïde Taylorienne, ou ſelon M. *Bernoulli* un mêlange de pluſieurs telles trochoïdes. C'eſt auſſi ſelon toute apparence la raiſon, pourquoi Mrs. *Bernoulli* & d'*Alembert* ont cru, que le problème n'étoit réſoluble que dans ces cas. Mais, de la maniere que je viens de conduire la ſolution, il n'eſt pas néceſſaire, que la courbe directrice ſoit exprimée par quelque équation, & la ſeule conſidération du trait de la courbe ſuffit à nous faire connoitre le mouvement de la corde, ſans l'aſſujettir au calcul. Je ferai auſſi voir, que ce mouvement n'eſt pas moins régulier, que ſi la figure initiale étoit une trochoïde, & par conſéquent la régularité du

 mouad pag. 203. Tab. IV.

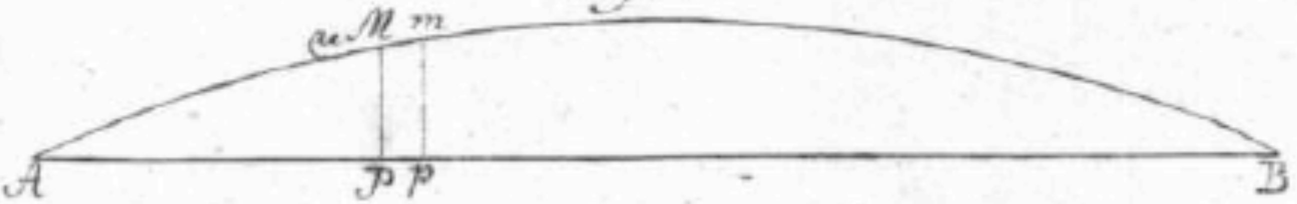

Fig. 1.

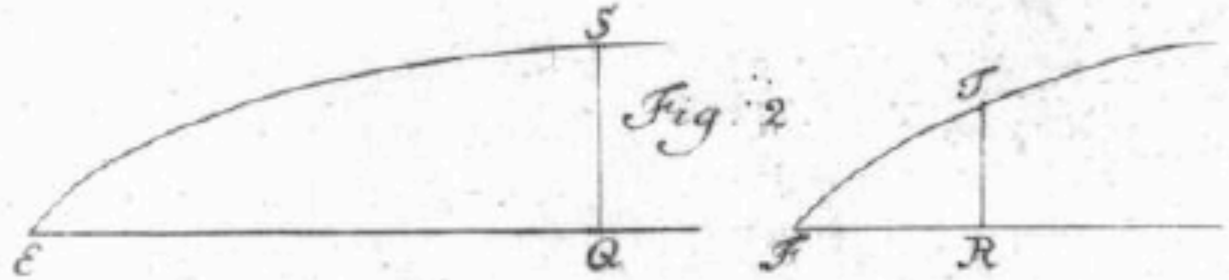

Fig. 2

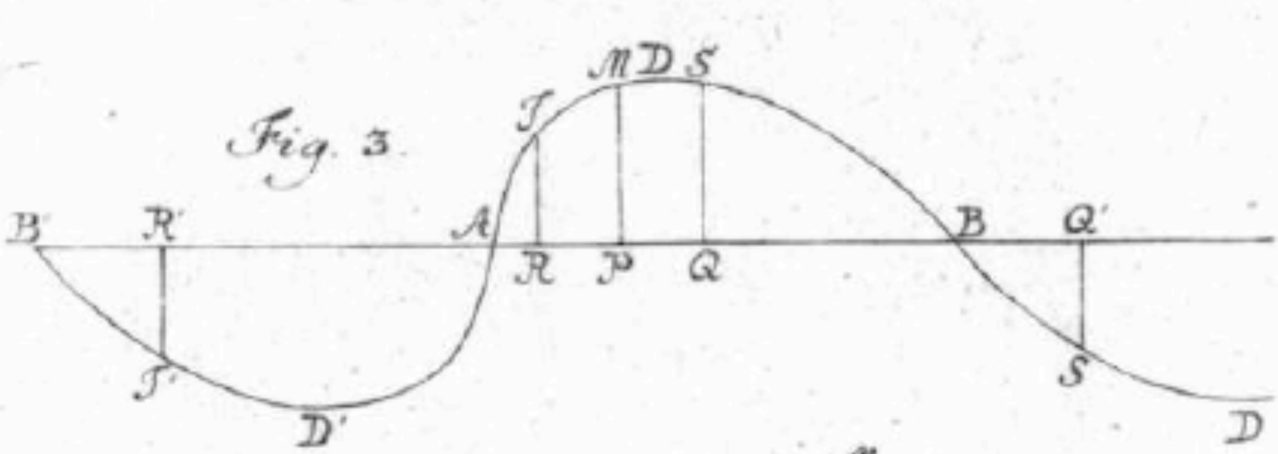

Fig. 3.

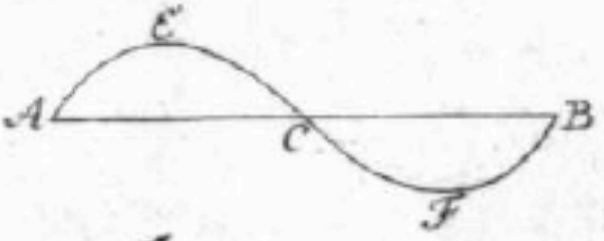

Fig. 5.

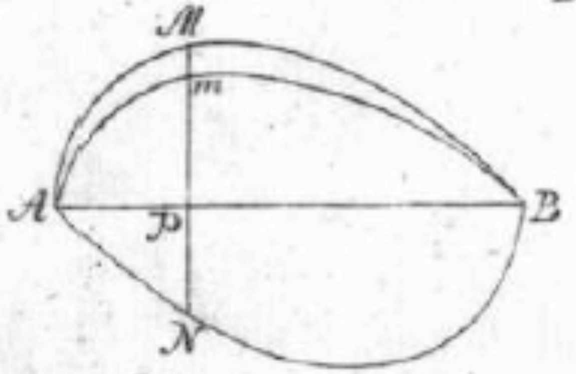

Fig. 4.

Mem. de l'Acad. Tom. IX pag. 352.

F.H. Frisch sc. Berl.