L. EULER : Texte b)

INTRODUCTION
A
L'ANALYSE INFINITÉSIMALE.

LIVRE PREMIER,

CONTENANT l'Explication des diverſes ſortes de Fonctions, leur réſolution en Facteurs & leur développement en Séries infinies; avec la théorie des Logarithmes, celle des Arcs de cercle, de leurs Sinus & de leurs Tangentes, & pluſieurs autres Queſtions propres à faciliter l'étude de l'Analyſe infinitéſimale.

CHAPITRE PREMIER.

Des Fonctions en général.

1. *Une quantité conſtante eſt une quantité déterminée, qui conſerve toujours la même valeur.*

Tels ſont les nombres de toute eſpece, qui conſervent conſtamment la valeur qu'ils ont une fois obtenue. Lorſqu'il s'agit de repréſenter ces ſortes de quantités par des caractères, on ſe ſert des premieres lettres de l'Alphabet a, b, c, &c. A la vérité, dans l'Analyſe ordinaire qui n'a pour objet que des quantités déterminées, on déſigne ordinairement celles qui ſont connues par les premieres lettres de l'Alphabet, & celles qui ne le ſont pas, par les dernieres; mais c'eſt une diſtinction à laquelle on a moins égard dans la haute Géométrie; on y enviſage les quantités ſous un autre aſpect particulier, les unes étant considérées comme constantes, & les autres comme variables.

2. *Une quantité variable est une quantité indéterminée, ou, si l'on veut, une quantité universelle, qui comprend toutes les valeurs déterminées.*

Une valeur déterminée quelconque pouvant être exprimée en nombre, il s'ensuit qu'une quantité variable comprend tous les nombres de quelque nature qu'ils soient. Il en est de la quantité variable, comme du genre & de l'espece à l'égard des individus ; on peut la concevoir comme embrassant toutes les quantités déterminées. Au reste, on a coutume de représenter les quantités variables par les dernieres lettres de l'Alphabet z, y, x, &c.

3. *Une quantité variable devient déterminée, lorsqu'on lui attribue une valeur déterminée quelconque.*

Elle peut donc le devenir d'une infinité de manieres, puisqu'on peut lui substituer tous les nombres imaginables. La signification d'une quantité variable ne peut être censée épuisée, qu'autant qu'on aura conçu en sa place toutes les valeurs déterminées. Ainsi une telle quantité comprend tous les nombres tant positifs que négatifs, les nombres entiers & fractionnaires, ceux qui sont rationnels, irrationnels & transcendants ; on ne doit pas même en exclure zéro, ni les nombres imaginaires.

4. *Une fonction de quantité variable est une expression analytique composée, de quelque maniere que ce soit, de cette même quantité & de nombres, ou de quantités constantes.*

Ainsi toute expression analytique, qui outre la variable z contiendra des quantités constantes, est une fonction de z. Par exemple, $a + 3z$; $az - 4zz$; $az^2 + b\sqrt{aa - zz}$; c^z; &c, sont des fonctions de z.

5. *Une fonction de variable est donc aussi une quantité variable.*

En effet, comme on peut mettre à la place de la variable toutes les valeurs déterminées, la fonction recevra elle-même

une infinité de valeurs, & il est impossible d'en concevoir aucune, dont elle ne soit susceptible, puisque la variable comprend même les valeurs imaginaires. Par exemple, quoique cette fonction $\sqrt{(9 - zz)}$ ne puisse donner un nombre plus grand que 3, tant qu'on mettra des nombres réels à la place de z ; cependant, en introduisant pour z des nombres imaginaires, tels que $5\sqrt{-1}$, il n'est pas possible d'assigner une valeur déterminée, qui ne puisse être déduite de la formule $\sqrt{(9 - zz)}$. Au reste, il n'est pas rare de rencontrer des expressions qui ne sont que des fonctions apparentes ; car, quelque valeur qu'on donne à la variable, elles conservent toujours la même valeur, comme z^0; 1^z; $\frac{aa - az}{a - z}$. Ces expressions, sous la forme apparente de fonctions de variables, sont réellement des quantités constantes.

6. *La principale différence des fonctions consiste dans la combinaison de la variable & des quantités constantes, qui les forment.*

Elle dépend donc des opérations par lesquelles les quantités peuvent être composées & combinées entr'elles. Ces opérations sont l'Addition & la Soustraction ; la Multiplication & la Division ; l'Élévation aux Puissances & l'Extraction des Racines ; à quoi il faut ajouter encore la Résolution des Équations. Outre ces opérations, qu'on appelle algébriques, il y en a plusieurs autres qu'on nomme transcendantes : comme les exponentielles, les logarithmiques, & d'autres sans nombre, que le Calcul Intégral fait connoître.

Distinguons cependant certaines especes de fonctions ; savoir, les Multiples $2z$; $3z$; $\frac{3}{5}z$; az, &c. & les Puissances de z; comme z^4; z^3; $z^{\frac{1}{2}}$; z^{-1}; &c, quantités formées par une seule opération, & qui, comme celles qui résultent de la combinaison de plusieurs, ne laissent pas de porter de même le nom de fonctions.

7. *Les fonctions se divisent en algébriques & en transcendantes ; les premieres sont formées par des opérations algébriques*

ſeulement, & les dernieres ſuppoſent pour leur formation des opérations tranſcendantes.

Les multiples & les puiſſances de z ſont donc des fonctions algébriques, ainſi que toutes les expreſſions, qui n'admettent que les opérations algébriques, dont nous avons parlé; telle eſt la quantité $\frac{a + bz^n - c\sqrt{(2z - zz)}}{aaz - 3bz^3}$. Souvent les fonctions algébriques ne peuvent être repréſentées explicitement; telle ſeroit la fonction Z de z, ſi elle étoit exprimée par l'équation $Z^5 = azzZ^3 - bz^4Z^2 + cz^3Z - 1$. Car, quoique cette équation ne puiſſe être réſolue, il n'en eſt pas moins certain que Z eſt égal à une expreſſion compoſée de la variable z & de conſtantes, & que par conſéquent Z eſt une fonction quelconque de z. Pour avoir une fonction tranſcendante, il ne ſuffit pas qu'il entre dans ſon expreſſion une opération tranſcendante, il faut de plus qu'elle affecte la variable; car ſi elle n'affectoit que des conſtantes, la fonction n'en ſeroit pas moins cenſée algébrique. Par exemple, ſi c déſigne la circonférence d'un cercle, dont le rayon $= 1$, la quantité c ſera bien une quantité tranſcendante; cependant ces expreſſions $c + z$; cz^2; $4z^c$, &c. ſeront des fonctions algébriques de z. Car il importe peu de ſavoir ſi ces ſortes d'expreſſions z^c doivent être miſes au nombre des fonctions algébriques ou non. Il y a auſſi des Géomètres qui ont mieux aimé donner aux puiſſances de z, dont les expoſans étoient des nombres irrationnels, comme $z^{\sqrt{2}}$, le nom de fonctions interſcendantes, que celui de fonctions algébriques.

8. *Les fonctions algébriques ſe ſubdiviſent en rationnelles & en irrationnelles. Dan les dernieres la variable eſt affectée de radicaux, & dans les premieres elle n'en eſt point affectée.*

Par conſéquent, les fonctions rationnelles n'admettent pas d'autres opérations que l'Addition, la Souſtraction, la Multiplication, la Diviſion & l'Elévation aux Puiſſances, dont les expoſans ſont des nombres entiers; ainſi, les quantités $a + z$; $a - z$; az; $\frac{aa + zz}{a + z}$, $az^3 - bz^5$, &c. ſont des fonctions rationnelles de z; mais ces expreſſions $\sqrt{z}$; $a + \sqrt{(aa - zz)}$; $\sqrt[3]{(a - 2z + zz)}$; $\frac{aa - z\sqrt{(aa + zz)}}{a + z}$ en feront des fonctions irrationnelles.

Celles-ci ſe diviſent commodément en explicites & en implicites.

Les explicites ſont développées au moyen des radicaux; nous en avons donné des exemples, & les implicites dépendent de la réſolution des équations. Ainſi Z ſera une fonction irrationnelle implicite de z, ſi elle eſt repréſentée par cette équation $Z^7 = azZ^2 - bz^5$. En effet, on ne peut en tirer la valeur explicite de Z, même en admettant les ſignes radicaux, par la raiſon que l'Algébre n'eſt pas encore parvenue à ce degré de perfection.

9. *Les fonctions rationnelles enfin, ſe diviſent en entieres & en fractionnaires.*

Dans celles-là, il n'entre aucune puiſſance négative de la variable z, ni aucunes fractions qui renferment cette variable dans leurs dénominateurs; d'où il ſuit que les fonctions fractionnaires ſont celles qui ont des dénominateurs affectés de la variable z, ou dans leſquelles ſe rencontrent des expoſans négatifs de cette même variable. Ainſi la formule générale des fonctions entieres ſera $a + bz + cz^2 + dz^3 + ez^4 + fz^5 +$ &c. Car on ne peut imaginer aucune fonction entiere de z, qui ne ſoit renfermée dans cette expreſſion. Quant aux fonctions fractionnaires, comme pluſieurs fractions peuvent toujours être réduites à une ſeule, elles ſeront compriſes dans la formule

$$\frac{a + bz + cz^2 + dz^3 + ez^4 + fz^5 + \&c.}{\alpha + \beta z + \gamma z^2 + \delta z^3 + \epsilon z^4 + \zeta z^5 + \&c.}$$

Remarquez ici que les quantités conſtantes a, b, c, d, &c. $\alpha, \beta, \gamma, \delta$, &c. ſoit qu'on les ſuppoſe poſitives ou négatives, entieres ou fractionnaires, rationnelles ou irrationnelles, &

même tranſcendantes, ne changent point la nature des fonctions.

10. *Il faut enſuite remarquer principalement la diviſion des fonctions en uniformes & en multiformes.*

La fonction uniforme eſt celle qui n'obtient qu'une ſeule valeur déterminée, quelque valeur déterminée qu'on donne à la variable z. La fonction multiforme eſt celle qui, pour chaque valeur déterminée qu'on met à la place de la variable, donne pluſieurs valeurs déterminées. Toutes les fonctions rationnelles ſoit entieres, ſoit fractionnaires, ſont des fonctions uniformes, parce que ces ſortes d'expreſſions, quelque ſoit le nombre qu'on ſubſtitue à la variable, n'obtiennent qu'une ſeule valeur; mais les fonctions irrationnelles ſont toutes multiformes, à cauſe de l'ambiguité des ſignes radicaux, & de la double valeur qu'ils indiquent. Il y a auſſi parmi les fonctions tranſcendantes des fonctions uniformes & multiformes, on peut même admettre des fonctions infinitiformes; tel ſeroit l'arc de cercle qui répondroit au ſinus z, car il y a une infinité d'arcs circulaires qui ont tous le même ſinus. Dans ce qui ſuit nous ſuppoſerons que les lettres P, Q, R, S, T, &c. repréſentent chacune des fonctions uniformes de z.

[...]

CHAPITRE IV.

Du développement des Fonctions en Séries infinies.

59. La formule $A + Bz + Cz^2 + Dz^3 +$ &c, en ne prenant qu'un nombre fini de termes, ne peut repréſenter ni les fonctions fractionnaires, ni les fonctions irrationnelles de z; néanmoins on cherche ordinairement pour les exprimer une ſuite de même forme, qu'on ſuppoſe compoſée d'une infinité de termes. D'ailleurs une ſemblable ſérie, quoique infinie, paroît plus propre à faire connoître la nature des fonctions tranſcendantes. En effet, ſi la nature d'une fonction entiere eſt bien déterminée, lorſque cette fonction eſt développée ſuivant les différentes puiſſances de z, & ramenée par conſéquent à la forme $A + Bz + Cz^2 + Dz^3 +$ &c; la même forme paroît auſſi la plus propre à repréſenter à l'eſprit le caractere de toutes les

autres fonctions, quoique le nombre des termes de la suite soit infini. Au reste, il est évident qu'une fonction non entiere de z ne peut être représentée par un nombre fini de termes de cette sorte : $A + Bz + Cz^2 +$ &c ; car si elle pouvoit l'être, elle seroit par cela même une fonction entiere ; & si quelqu'un doutoit qu'elle pût être exprimée par une telle série d'un nombre infini de termes, le développement même de chaque fonction ne lui laissera aucun doute ; mais pour plus de généralité, outre les puissances de z, qui ont des exposans positifs & entiers, on doit admettre des puissances quelconques. Ainsi il ne restera aucun doute, que toute fonction de z ne puisse être transformée en une série infinie de cette forme : $Az^{\alpha} + Bz^{\beta} + Cz^{\gamma} + Dz^{\delta}$, les exposans α, β, γ, δ, &c. exprimant des nombres quelconques.

60. *On sait qu'au moyen d'une division continue, la fraction* $\frac{a}{\alpha + \beta z}$ *se résout en cette suite infinie :* $\frac{a}{\alpha} - \frac{a\beta z}{\alpha^2} + \frac{a\beta^2 z^2}{\alpha^3} - \frac{a\beta^3 z^3}{\alpha^4} + \frac{a\beta^4 z^4}{\alpha^5} -$ *&c, laquelle se nomme une progression géométrique, parce que chaque terme a un rapport constant* $1 : \frac{\beta z}{\alpha}$, *avec celui qui le suit.*

Il y a une autre maniere de trouver cette série ; c'est de la supposer d'avance, quoique inconnue, toute développée : car, soit $\frac{a}{\alpha + \beta z} = A + Bz + Cz^2 + Dz^3 + Ez^4 +$ &c. Pour produire l'égalité, cherchons les coëfficiens A, B, C, D, &c ; nous aurons $a = (\alpha + \beta z)(A + Bz + Cz^2 + Dz^3 +$ &c.) & après la multiplication faite, ...

$$a = \alpha A + \alpha Bz + \alpha Cz^2 + \alpha Dz^3 + \alpha Ez^4 + \text{\&c.}$$
$$+ \beta Az + \beta Bz^2 + \beta Cz^3 + \beta Dz^4 + \text{\&c.}$$

Par conséquent nous devons avoir $a = \alpha A$, donc $A = \frac{a}{\alpha}$; il faudra ensuite égaler à zéro la somme des coëfficiens de chaque puissance de z ; ce qui donnera les équations :

$\alpha B + \beta A = 0$
$\alpha C + \beta B = 0$
$\alpha D + \beta C = 0$
$\alpha E + \beta D = 0$
&c.

chaque coëfficient trouvé fera donc connoître facilement le suivant. Car si le coëfficient d'un terme quelconque $= P$, & le suivant $= Q$; on aura $\alpha Q + \beta P = 0$, ou $Q = -\frac{\beta P}{\alpha}$. Ainsi le premier terme $A = \frac{a}{\alpha}$, étant une fois déterminé, on en conclura les valeurs des lettres suivantes B, C, D, &c. qu'on trouvera les mêmes que celles que donne la division. Au reste, on voit à l'inspection, que dans la série trouvée pour $\frac{a}{\alpha + \beta z}$, le coëfficient de la puissance z^n sera $= \mp \frac{a \cdot \beta^n}{\alpha^{n+1}}$, le signe $+$ ayant lieu lorsque n est un nombre pair, & le signe $-$ lorsque n est impair, ou si l'on veut, le coëfficient sera $= \frac{a}{\alpha}\left(\frac{-\beta}{\alpha}\right)^n$.

[...]

CHAPITRE VIII.

Des Quantités transcendantes qui naissent du Cercle.

126. Après la considération des logarithmes & des quantités exponentielles, vient celle des arcs de cercle, & de leurs sinus & cosinus, tant parce qu'ils forment une autre espece de quantités transcendantes, que parce qu'ils dérivent des quantités logarithmiques mêmes & des quantités exponentielles, lorsqu'elles renferment des imaginaires, ce qu'on verra plus clairement ci-après.

Supposons donc le rayon du cercle ou le sinus total $= 1$, il paroît assez clair que la circonférence de ce cercle ne peut être exprimée exactement en nombres rationnels *, mais on a trouvé par approximation la demi-circonférence de ce cercle $=$ . . . .
3,141592653589793238462643383279502
884197169399375105820974944592307816
4062862089986280348253421170679821480
8651327230664709384446 $+$. Pour abréger j'écrirai π au lieu de ce nombre, de sorte que $\pi =$ à la demi circonférence d'un cercle dont le rayon $= 1$; ou π sera la longueur d'un arc de 180 degrés.

* Cette proposition a été démontrée par Lambert, *Mémoires de Berlin*; mais on en trouvera une démonstration plus simple dans les *Élémens de Géométrie* du C. Legendre, qui ont paru depuis peu.

127. Soit z un arc quelconque de cercle dont je suppose toujours le rayon $= 1$; on a coutume de considérer plus particuliérement les sinus & cosinus de cet arc z. Pour représenter dans la suite le sinus d'un arc z, j'écrirai $\mathit{sin.}\ A.z$, ou simplement $\mathit{sin.}\ z$. Et pour représenter le cosinus j'écrirai $\mathit{cos.}\ A.\ z$, ou seulement $\mathit{cos.}\ z$. Ainsi comme π exprime un arc de 180°, $\mathit{sin.}\ 0\pi = 0$; $\mathit{cos.}\ 0\pi = 1$; $\mathit{sin.}\ \frac{1}{2}\pi = 1$; $\mathit{cos.}\ \frac{1}{2}\pi = 0$; $\mathit{sin.}\ \pi = 0$, $\mathit{cos.}\ \pi = -1$; $\mathit{sin.}\ \frac{3}{2}\pi = -1$, $\mathit{cos.}\ \frac{3}{2}\pi = 0$; $\mathit{sin.}\ 2\pi = 0$, & $\mathit{cos.}\ 2\pi = 1$. Tous les sinus & cosinus sont donc renfermés dans les limites $+1$ & -1 Or $\mathit{cos.}\ z = \mathit{sin.}\ (\frac{1}{2}\pi - z)$ & $\mathit{sin.}\ z = \mathit{cos.}\ (\frac{1}{2}\pi - z)$; & $(\mathit{sin.}\ z)^2 + (\mathit{cos.}\ z)^2 = 1$. Outre ces dénominations il faut distinguer celles-ci : $\mathit{tang.}\ z$, qui désigne la tangente de l'arc z, & $\mathit{cot.}\ z$, qui désigne la cotangente de l'arc z ; on sait d'ailleurs que $\mathit{tang.}\ z = \frac{\mathit{sin.}\ z}{\mathit{cos.}\ z}$, & que $\mathit{cot.}\ z = \frac{\mathit{cos}\ z}{\mathit{sin.}\ z} = \frac{1}{\mathit{tang.}\ z}$. Tout cela est connu par la Trigonométrie.

[. . .]

132. Puisque $(\sin. z)^2 + (\cos. z)^2 = 1$, en décomposant en facteurs, on aura $(\cos. z + \sqrt{-1}. \sin. z)(\cos. z - \sqrt{-1} \sin. z) = 1$. Ces facteurs, quoique imaginaires, sont d'un grand usage dans la combinaison & dans la multiplication des arcs. En effet, cherchons le produit de ces facteurs $(\cos. z + \sqrt{-1}. \sin. z)(\cos. y + \sqrt{-1}. \sin. y)$, nous trouverons $\cos. y. \cos. z - \sin. y. \sin. z + (\cos. y. \sin. z + \sin. y. \cos. z)\sqrt{-1}$; mais comme $\cos. y. \cos. z - \sin. y. \sin. z = \cos. (y+z)$, & $\cos. y. \sin. z + \sin. y. \cos. z = \sin. (y+z)$; nous obtiendrons ce produit $(\cos. y + \sqrt{-1}. \sin. y)(\cos. z$

$+ \sqrt{-1}. \sin. z) = \cos. (y+z) + \sqrt{-1}. \sin. (y+z)$.

Semblablement

$(\cos. y - \sqrt{-1}. \sin. y)(\cos. z - \sqrt{-1}. \sin. z) = \cos. (y+z) - \sqrt{-1}. \sin. (y+z)$.

De même

$(\cos. x \pm \sqrt{-1}. \sin. x)(\cos. y \pm \sqrt{-1}. \sin. y)(\cos. z \pm \sqrt{-1}. \sin. z) = \cos. (x+y+z) \pm \sqrt{-1}. \sin. (x+y+z)$.

133. Il suit de-là que $(\cos. z \pm \sqrt{-1}. \sin. z)^2 = \cos. 2z \pm \sqrt{-1}. \sin. 2z$, & $(\cos. z \pm \sqrt{-1}. \sin z)^3 = \cos. 3z \pm \sqrt{-1}. \sin. 3z$; & qu'en général $(\cos. z \pm \sqrt{-1}. \sin. z)^n = \cos. nz \pm \sqrt{-1}. \sin. nz$: d'où nous tirerons à cause du double signe,

$$\cos. nz = \frac{(\cos. z + \sqrt{-1}. \sin. z)^n + (\cos. z - \sqrt{-1}. \sin. z)^n}{2} \quad \&$$

$$\sin. nz = \frac{(\cos. z + \sqrt{-1}. \sin. z)^n - (\cos. z - \sqrt{-1}. \sin. z)^n}{2\sqrt{-1}}$$

Donc en développant ces binomes en séries, nous aurons

$$\cos. nz = (\cos. z)^n - \frac{n.(n-1)}{1.\ 2}(\cos. z)^{n-2}(\sin z)^2 + \frac{n.(n-1)(n-2).(n-3)}{1.\ 2.\ 3.\ 4}(\cos. z)^{n-4}(\sin. z)^4 - \ldots \frac{n.(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)(n-5)}{1.\ 2.\ 3.\ 4.\ 5.\ 6}(\cos. z)^{n-6}(\sin. z)^6 + \&c.$$

$$\& \sin. nz = \frac{n}{1}(\cos. z)^{n-1}\sin. z - \frac{n.(n-1)(n-2)}{1.\ 2.\ 3}(\cos. z)^{n-3}(\sin. z)^3 + \frac{n.(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)}{1.\ 2.\ 3.\ 4.\ 5}(\cos. z)^{n-5}(\sin. z)^5 - \&c.$$

134. Soit z un arc infiniment petit, alors $\sin. z = z$, & $\cos. z = 1$; soit en même temps n un nombre infiniment grand, pour que l'arc nz soit d'une grandeur finie, pour que nz, par exemple, $= v$; à cause de $\sin. z = z = \frac{v}{n}$, on aura

$$\cos. v = 1 - \frac{v^2}{1.\ 2} + \frac{v^4}{1.\ 2.\ 3.\ 4} - \frac{v^6}{1.\ 2.\ 3.\ 4.\ 5.\ 6} + \&c. \ \&$$

$$fin.\ v = v - \frac{v^3}{1.2.3} + \frac{v^5}{1.2.3.4.5} - \frac{v^7}{1.2.3.4.5.6.7} + \&c.$$

[...]

138. Suppoſons encore dans les formules précédentes (*art.* 133) l'arc z infiniment petit, & n un nombre infiniment grand i, afin d'obtenir pour iz une valeur finie v; nous aurons donc $nz = v$, & $z = \frac{v}{i}$, & par conſéquent $\text{ſin.}\ z = \frac{v}{i}$, & $\text{coſ.}\ z = 1$; ces ſubſtitutions faites donneront $\text{coſ.}\ v = \frac{\left(1 + \frac{v\sqrt{-1}}{i}\right)^i + \left(1 - \frac{v\sqrt{-1}}{i}\right)^i}{2}$ & $\text{ſin.}\ v = \frac{\left(1 + \frac{v\sqrt{-1}}{i}\right)^i - \left(1 - \frac{v\sqrt{-1}}{i}\right)^i}{2\sqrt{-1}}$. Or dans le Chapitre précédent, nous avons vu que $\left(1 + \frac{z}{i}\right)^i = e^z$, e déſignant la baſe des logarithmes hyperboliques; ayant donc écrit pour z, d'une part $+v\sqrt{-1}$ & d'une autre part $-v\sqrt{-1}$, on aura $\text{coſ.}\ v = \frac{e^{+v\sqrt{-1}} + e^{-v\sqrt{-1}}}{2}$ & $\text{ſin.}\ v = \frac{e^{+v\sqrt{-1}} - e^{-v\sqrt{-1}}}{2\sqrt{-1}}$. On comprend par là comment les quantités exponentielles imaginaires ſe ramenent à des ſinus & à des coſinus d'arcs réels. On aura auſſi $e^{+v\sqrt{-1}} = \text{coſ.}\ v + \sqrt{-1}\ \text{ſin.}\ v$, & $e^{-v\sqrt{-1}} = \text{coſ.}\ v - \sqrt{-1}\ \text{ſin.}\ v$.

[...]