THÉORIE
ANALYTIQUE
DE LA CHALEUR,

Par M. FOURIER.

A PARIS,
CHEZ FIRMIN DIDOT, PÈRE ET FILS,
LIBRAIRES POUR LES MATHÉMATIQUES, L'ARCHITECTURE HYDRAULIQUE
ET LA MARINE, RUE JACOB, N° 24.

1822.

DISCOURS PRÉLIMINAIRE.

Les causes primordiales ne nous sont point connues, mais elles sont assujetties à des lois simples et constantes que l'on peut découvrir par l'observation, et dont l'étude est l'objet de la Philosophie naturelle.

La chaleur pénètre, comme la gravité, toutes les substances de l'univers; ses rayons occupent toutes les parties de l'espace. Le but de notre Ouvrage est d'exposer les lois mathématiques que suit cet élément. Cette théorie formera désormais une des branches les plus importantes de la Physique générale.

Les connaissances que les plus anciens peuples avaient pu acquérir dans la Mécanique rationnelle ne nous sont point parvenues, et l'histoire de cette science, si l'on excepte les premiers théorèmes sur l'harmonie, ne remonte point au delà des découvertes d'Archimède. Ce grand géomètre expliqua les principes mathématiques de l'équilibre des solides et des fluides. Il s'écoula environ dix-huit siècles avant que Galilée, premier inventeur des théories dynamiques, découvrît les lois du mouvement des corps graves. Newton embrassa dans cette science nouvelle tout le système de l'univers. Les successeurs de ces philosophes ont donné à ces théories une étendue et une perfection admirables; ils nous ont appris que les phénomènes les plus divers sont soumis à un petit nombre de lois fondamentales, qui se reproduisent dans tous les actes de la nature. On a reconnu que les mêmes principes règlent tous les mouvements des astres, leur forme, les inégalités de leurs cours, l'équilibre et les oscillations des mers, les vibrations harmoniques de l'air et des corps sonores, la transmission de la lumière, les actions capillaires, les ondulations des liquides, enfin, les effets les plus composés de toutes les forces naturelles; et l'on a confirmé cette pensée de Newton : *Quod tam paucis tam multa præstet Geometria gloriatur* (1).

Mais, quelle que soit l'étendue des théories mécaniques, elles ne s'appliquent point aux effets de la chaleur. Ils composent un ordre spécial de phénomènes qui ne peuvent s'expliquer par les principes du mouvement et de l'équilibre. On possède depuis longtemps des instruments ingénieux propres à mesurer plusieurs de ces effets; on a recueilli des observations précieuses; mais on ne connait ainsi que des résultats partiels, et non la démonstration mathématique des lois qui les comprennent tous.

J'ai déduit ces lois d'une longue étude et de la comparaison attentive des faits connus jusqu'à ce jour; je les ai tous observés de nouveau, dans le cours de plusieurs années, avec les instruments les plus précis dont on ait encore fait usage.

Pour fonder cette théorie, il était d'abord nécessaire de distinguer et de définir avec précision les propriétés élémentaires qui déterminent l'action de la chaleur. J'ai reconnu ensuite que tous les phénomènes qui dépendent de cette action se résolvent en un très petit nombre de faits généraux et simples; et, par là, toute question physique de ce genre est ramenée à une recherche d'Analyse mathématique. J'en ai conclu que, pour déterminer en nombre les mouvements les plus variés de la chaleur, il suffit de soumettre chaque substance à trois observations fondamentales. En effet, les différents corps ne pos-

(1) *Philosophiæ naturalis principia mathematica. Præfatio ad lectorem.* Ac gloriatur Geometria quod tam paucis principiis aliunde petitis tam multa præstet. G. D.

sèdent point au même degré la faculté de *contenir* la chaleur, *de la recevoir* ou *de la transmettre* à travers leur superficie, et de la *conduire* dans l'intérieur de la masse. Ce sont trois qualités spécifiques que notre théorie distingue clairement et qu'elle apprend à mesurer.

[...]

p. XXI

Les principes de cette théorie sont déduits, comme ceux de la Mécanique rationnelle, d'un très petit nombre de faits primordiaux, dont les géomètres ne considèrent point la cause, mais qu'ils admettent comme résultant des observations communes et confirmées par toutes les expériences.

Les équations différentielles de la propagation de la chaleur expriment les conditions les plus générales, et ramènent les questions physiques à des problèmes d'Analyse pure, ce qui est proprement l'objet de la théorie. Elles ne sont pas moins rigoureusement démontrées que les équations générales de l'équilibre et du mouvement. C'est pour rendre cette comparaison plus sensible que nous avons toujours préféré des démonstrations analogues à celles des théorèmes qui servent de fondement à la Statique et à la Dynamique. Ces équations subsistent encore, mais elles reçoivent une forme différente, si elles expriment la distribution de la chaleur lumineuse dans les corps diaphanes, ou les mouvements que les changements de température et de densité occasionnent dans l'intérieur des fluides. Les coefficients qu'elles renferment sont sujets à des variations dont la mesure exacte n'est pas encore connue; mais, dans toutes les questions naturelles qu'il nous importe le plus de considérer, les limites des températures sont assez peu différentes pour que l'on puisse omettre ces variations des coefficients.

Les équations du mouvement de la chaleur, comme celles qui expriment les vibrations des corps sonores, ou les dernières oscillations des liquides, appartiennent à une des branches de la Science du calcul les plus récemment découvertes, et qu'il importait beaucoup de perfectionner. Après avoir établi ces équations différentielles, il fallait en obtenir les intégrales; ce qui consiste à passer d'une expression commune à une solution propre, assujettie à toutes les conditions données. Cette recherche difficile exigeait une analyse spéciale, fondée sur des théorèmes nouveaux dont nous ne pourrions ici faire connaître l'objet. La méthode qui en dérive ne laisse rien de vague et d'indéterminé dans les solutions; elle les conduit jusqu'aux dernières applications numériques, condition nécessaire de toute recherche, et sans laquelle on n'arriverait qu'à des transformations inutiles.

Ces mêmes théorèmes qui nous ont fait connaître les intégrales des équations du mouvement de la chaleur s'appliquent immédiatement à des questions d'Analyse générale et de Dynamique dont on désirait depuis longtemps la solution.

L'étude approfondie de la nature est la source la plus féconde des découvertes mathématiques. Non seulement cette étude, en offrant aux recherches un but déterminé, a l'avantage d'exclure les questions vagues et les calculs sans issue : elle est encore un moyen assuré de former l'Analyse elle-même, et d'en découvrir les éléments qu'il nous importe le plus de connaître, et que cette science doit toujours conserver : ces éléments fondamentaux sont ceux qui se reproduisent dans tous les effets naturels.

On voit, par exemple, qu'une même expression, dont les géomètres avaient considéré les propriétés abstraites et qui, sous ce rapport, appartient à l'Analyse générale, représente aussi le mouvement de la lumière dans l'atmosphère, qu'elle détermine les lois de la diffusion de la chaleur dans la matière solide, et qu'elle entre dans toutes les questions principales de la Théorie des probabilités.

Les équations analytiques, ignorées des anciens géomètres, que Descartes a introduites le premier dans l'étude des courbes et des surfaces, ne sont pas restreintes aux propriétés des figures et à celles qui sont l'objet de la Mécanique rationnelle; elles s'étendent à tous les phénomènes généraux. Il ne peut y avoir de langage plus universel et plus simple, plus exempt d'erreurs et d'obscurités, c'est-à-dire plus digne d'exprimer les rapports invariables des êtres naturels.

Considérée sous ce point de vue, l'Analyse mathématique est aussi étendue que la nature elle-même; elle définit tous les rapports sensibles, mesure les temps, les espaces, les forces, les températures; cette science difficile se forme avec lenteur, mais elle conserve tous les principes qu'elle a une fois acquis; elle s'accroît et s'affermit sans cesse, au milieu de tant de variations et d'erreurs de l'esprit humain.

Son attribut principal est la clarté; elle n'a point de signes pour exprimer les notions confuses. Elle rapproche les phénomènes les plus divers et découvre les analogies secrètes qui les unissent. Si la matière nous échappe, comme celle de l'air et de la lumière, par son extrême ténuité, si les corps sont placés loin de nous, dans l'immensité de l'espace, si l'homme veut connaître le spectacle des cieux pour des époques successives que séparent un grand nombre de siècles, si les actions de la gravité et de la chaleur s'exercent dans l'intérieur du globe solide à des profondeurs qui seront toujours inaccessibles, l'Analyse mathématique peut encore saisir les lois de ces phénomènes. Elle nous les rend présents et mesurables, et semble être une faculté de la raison humaine destinée à suppléer à la brièveté de la vie et à l'imperfection des sens; et, ce qui est plus remarquable encore, elle suit la même marche dans l'étude de tous les phénomènes; elle les interprète par le même langage, comme pour attester l'unité et la simplicité du plan de l'univers, et rendre encore plus manifeste cet ordre immuable qui préside à toutes les causes naturelles.

[. . .]

SECTION VI.

DÉVELOPPEMENT D'UNE FONCTION ARBITRAIRE EN SÉRIES TRIGONOMÉTRIQUES.

207.

La question de la propagation de la chaleur dans un solide rectangulaire a conduit à l'équation

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} = 0;$$

et, si l'on suppose que tous les points de l'une des faces du solide ont une température commune, il faut déterminer les coefficients a, b, c, d, e, ... de la série

$$a \cos x + b \cos 3x + c \cos 5x + d \cos 7x + \ldots,$$

en sorte que la valeur de cette fonction soit égale à une constante toutes les fois que l'arc x est compris entre $-\frac{\pi}{2}$ et $+\frac{\pi}{2}$. On vient d'assigner la valeur de ces coefficients; mais on n'a traité qu'un seul cas d'un problème plus général, qui consiste à développer une fonction quelconque en une suite infinie de sinus ou de cosinus d'arcs multiples. Cette question est liée à la théorie des équations aux différences partielles et a été agitée dès l'origine de cette analyse. Il était nécessaire de la résoudre pour intégrer convenablement les équations de la propagation de la chaleur; nous allons en exposer la solution.

On examinera, en premier lieu, le cas où il s'agit de réduire en une série de sinus d'arcs multiples une fonction dont le développement ne contient que des puissances impaires de la variable. Désignant une telle fonction par $\varphi(x)$, on posera l'équation

$$\varphi(x) = a\sin x + b\sin 2x + c\sin 3x + d\sin 4x + \ldots,$$

et il s'agit de déterminer la valeur des coefficients $a, b, c, d, \ldots$. On écrira d'abord l'équation

$$\varphi(x) = x\varphi'(0) + \frac{x^2}{2}\varphi''(0) + \frac{x^3}{2.3}\varphi'''(0) + \frac{x^4}{2.3.4}\varphi^{\text{IV}}(0) + \frac{x^5}{2.3.4.5}\varphi^{\text{V}}(0) + \ldots,$$

dans laquelle $\varphi'(0), \varphi''(0), \varphi'''(0), \varphi^{\text{IV}}(0), \ldots$ désignent les valeurs que prennent les coefficients

$$\frac{d\varphi(x)}{dx}, \quad \frac{d^2\varphi(x)}{dx^2}, \quad \frac{d^3\varphi(x)}{dx^3}, \quad \frac{d^4\varphi(x)}{dx^4}, \quad \ldots$$

lorsqu'on y suppose $x = 0$. Ainsi, en représentant le développement selon les puissances de x par l'équation

$$\varphi(x) = \text{A}x - \text{B}\frac{x^3}{2.3} + \text{C}\frac{x^5}{2.3.4.5} - \text{D}\frac{x^7}{2.3.4.5.6.7} + \text{E}\frac{x^9}{2.3.4.5.6.7.8.9} - \ldots,$$

on aura

$$\begin{array}{ll}
\varphi(0) = 0, & \varphi'(0) = \text{A}, \\
\varphi''(0) = 0, & \varphi'''(0) = -\text{B}, \\
\varphi^{\text{IV}}(0) = 0, & \varphi^{\text{V}}(0) = \text{C}, \\
\varphi^{\text{VI}}(0) = 0, & \varphi^{\text{VII}}(0) = -\text{D}, \\
\ldots\ldots\ldots, & \ldots\ldots\ldots\ldots
\end{array}$$

Si maintenant on compare l'équation précédente à celle-ci

$$\varphi(x) = a\sin x + b\sin 2x + c\sin 3x + d\sin 4x + \ldots,$$

en développant le second membre par rapport aux puissances de x, on aura les équations

$$(a)\quad\left\{\begin{aligned}
A &= a + 2\,b + 3\,c + 4\,d + 5\,e + \ldots,\\
B &= a + 2^3 b + 3^3 c + 4^3 d + 5^3 e + \ldots,\\
C &= a + 2^5 b + 3^5 c + 4^5 d + 5^5 e + \ldots,\\
D &= a + 2^7 b + 3^7 c + 4^7 d + 5^7 e + \ldots,\\
E &= a + 2^9 b + 3^9 c + 4^9 d + 5^9 e + \ldots,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{aligned}\right.$$

Ces équations doivent servir à trouver les coefficients a, b, c, d, e, ..., dont le nombre est infini. Pour y parvenir, on regardera d'abord comme déterminé et égal à m le nombre des inconnues, et l'on conservera un pareil nombre m d'équations; ainsi l'on supprimera toutes les équations qui suivent les m premières, et l'on omettra, dans chacune de ces équations, tous les termes du second membre qui suivent les m premiers que l'on conserve. Le nombre entier m étant donné, les coefficients a, b, c, d, e, ... ont des valeurs fixes que l'on peut trouver par l'élimination. On obtiendrait pour ces mêmes quantités des valeurs différentes si le nombre des équations et celui des inconnues étaient plus grands d'une unité. Ainsi la valeur des coefficients varie à mesure que l'on augmente le nombre de ces coefficients et celui des équations qui doivent les déterminer. Il s'agit de rechercher quelles sont les limites vers lesquelles les valeurs des inconnues convergent continuellement, à mesure que le nombre des équations devient plus grand. Ces limites sont les véritables valeurs des inconnues qui satisfont aux équations précédentes lorsque leur nombre est infini (¹).

[...]

220.

On voit par là que les coefficients a, b, c, d, e, f, ..., qui entrent dans l'équation

$$\frac{\pi}{2}\varphi(x) = a\sin x + b\sin 2x + c\sin 3x + d\sin 4x + \ldots,$$

et que nous avons trouvés précédemment par la voie des éliminations successives, sont des valeurs intégrales définies exprimées par le terme général

$$\int \sin ix\,\varphi(x)\,dx,$$

i étant le numéro du terme dont on cherche le coefficient. Cette remarque est importante, en ce qu'elle fait connaître comment les fonctions entièrement arbitraires peuvent aussi être développées en séries de sinus d'arcs multiples. En effet, si la fonction $\varphi(x)$ est représentée par l'ordonnée variable d'une courbe quelconque, dont l'abscisse s'étend depuis $x = 0$ jusqu'à $x = \pi$, et si l'on construit sur cette même partie de l'axe la courbe trigonométrique connue dont l'ordonnée est $y = \sin x$, il sera facile de se représenter la valeur d'un terme intégral. Il faut concevoir que, pour chaque abscisse x à laquelle répond une valeur de $\varphi(x)$ et une valeur de $\sin x$, on multiplie cette dernière valeur par la première, et qu'au même point de l'axe on élève une ordonnée proportionnelle au produit $\varphi(x)\sin x$. On formera, par cette opération continuelle, une troisième courbe dont les ordonnées sont celles de la courbe trigonométrique, réduites proportionnellement aux ordonnées de la courbe arbitraire qui représente $\varphi(x)$. Cela posé, l'aire de la courbe réduite, étant prise depuis $x = 0$ jusqu'à $x = \pi$, donnera la valeur exacte du coefficient de $\sin x$; et, quelle que puisse être la courbe donnée qui répond à $\varphi(x)$, soit qu'on puisse lui assigner une équation analytique, soit qu'elle ne dépende d'aucune loi régulière, il est évident qu'elle servira toujours à réduire d'une manière quelconque la courbe trigonométrique; en sorte que l'aire de la courbe réduite a, dans tous les cas possibles, une valeur déterminée qui donne celle du coefficient de $\sin x$ dans le développement de la fonction. Il en est de même du coefficient suivant b ou $\int \varphi(x) \sin 2x \, dx$.

Il faut, en général, pour construire les valeurs des coefficients a, b, c, d, e, ..., imaginer que les courbes dont les équations sont

$$y = \sin x, \quad y = \sin 2x, \quad y = \sin 3x, \quad y = \sin 4x, \quad \ldots$$

ont été tracées pour un même intervalle sur l'axe des x, depuis $x = 0$ jusqu'à $x = \pi$, et qu'ensuite on a changé ces courbes en multipliant toutes leurs ordonnées par les ordonnées correspondantes d'une même courbe, dont l'équation est $y = \varphi(x)$. Les équations des courbes réduites sont

$$y = \varphi(x) \sin x, \quad y = \varphi(x) \sin 2x, \quad y = \varphi(x) \sin 3x, \quad y = \varphi(x) \sin 4x, \quad \ldots.$$

Les aires de ces dernières courbes, prises depuis $x = 0$ jusqu'à $x = \pi$, seront les valeurs des coefficients a, b, c, d, ... dans l'équation

$$\frac{\pi}{2} \varphi(x) = a \sin x + b \sin 2x + c \sin 3x + d \sin 4x + \ldots.$$

221.

On peut aussi vérifier l'équation précédente (D) (art. 219), en déterminant immédiatement les quantités a_1, a_2, a_3, ..., a_j, ... dans l'équation

$$\varphi(x) = a_1 \sin x + a_2 \sin 2x + a_3 \sin 3x + \ldots + a_j \sin jx + \ldots;$$

pour cela on multipliera chacun des membres de la dernière équation par $\sin ix \, dx$, i étant un nombre entier, et l'on prendra l'intégrale depuis $x = 0$ jusqu'à $x = \pi$; on aura

$$\int \varphi(x) \sin ix\,dx = a_1 \int \sin x \sin ix\,dx$$
$$+ a_2 \int \sin 2x \sin ix\,dx + \ldots + a_j \int \sin jx \sin ix\,dx + \ldots.$$

Or on peut facilement prouver :

1° Que toutes les intégrales qui entrent dans le second membre ont une valeur nulle, excepté le seul terme $a_i \int \sin ix \sin ix\,dx$;

2° Que la valeur de $\int \sin ix \sin ix\,dx$ est $\frac{\pi}{2}$.

D'où l'on conclura la valeur de a_i qui est

$$\frac{2}{\pi} \int \varphi(x) \sin ix\,dx.$$

Tout se réduit à considérer la valeur des intégrales qui entrent dans le second membre, et à démontrer les deux propositions précédentes. L'intégrale

$$2 \int \sin jx \sin ix\,dx,$$

prise depuis $x = 0$ jusqu'à $x = \pi$, et dans laquelle i et j sont des nombres entiers, est

$$\frac{1}{i-j} \sin(i-j)x - \frac{1}{i+j} \sin(i+j)x + C.$$

L'intégrale devant commencer lorsque $x = 0$, la constante C est nulle, et, les nombres i et j étant entiers, la valeur de l'intégrale deviendra nulle lorsqu'on fera $x = \pi$; il s'ensuit que chacun des termes tels que

$$a_1 \int \sin x \sin ix\,dx,$$
$$a_2 \int \sin 2x \sin ix\,dx,$$
$$a_3 \int \sin 3x \sin ix\,dx,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

s'évanouit, et que cela aura lieu toutes les fois que les nombres i et j seront différents. Il n'en est pas de même lorsque les nombres i et j sont égaux; car le terme $\frac{1}{i-j}\sin(i-j)x$ auquel se réduit l'intégrale devient $\frac{0}{0}$, et sa valeur est π. On a, par conséquent,

$$2\int \sin ix \sin ix\, dx = \pi;$$

on obtient ainsi, de la manière la plus briève, les valeurs de a_1, a_2, a_3, a_4, ..., a_i, ..., qui sont

$$a_1 = \frac{2}{\pi}\int \varphi(x)\sin x\, dx,$$

$$a_2 = \frac{2}{\pi}\int \varphi(x)\sin 2x\, dx,$$

$$a_2 = \frac{2}{\pi}\int \varphi(x)\sin 3x\, dx,$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots,$$

$$a_i = \frac{2}{\pi}\int \varphi(x)\sin ix\, dx.$$

En les substituant, on a

$$\frac{\pi}{2}\varphi(x) = \sin x\int \varphi(x)\sin x\, dx + \sin 2x\int \varphi(x)\sin 2x\, dx$$
$$+ \sin 3x\int \varphi(x)\sin 3x\, dx + \ldots + \sin ix\int \varphi(x)\sin ix\, dx + \ldots.$$