La question que l'on vient de traiter est la première que nous ayons résolue dans la théorie de la chaleur, ou plutôt dans la partie de cette théorie qui exige l'emploi de l'analyse. Elle fournit des applications numériques très-faciles, soit que l'on fasse usage des tables trigonométriques ou des séries convergentes, et elle représente exactement toutes les circonstances du mouvement de la chaleur. Nous passerons maintenant à des considérations plus générales.

SECTION VI.

Développement d'une fonction arbitraire en séries trigonométriques.

207.

La question de la propagation de la chaleur dans un solide rectangulaire a conduit à l'équation $\frac{d^2 v}{dx^2} + \frac{d^2 v}{dy^2} = 0$; et si l'on suppose que tous les points de l'une des faces du solide ont une température commune, il faut déterminer les coëfficients $a, b, c, d, e,$ etc. de la série

$$a \cos. x + b \cos. 3x + c \cos. 5x + d \cos. 7x + \ldots \text{ etc.},$$

en sorte que la valeur de cette fonction soit égale à une constante toutes les fois que l'arc x est compris entre $-\frac{1}{2}\pi$ et $+\frac{1}{2}\pi$. On vient d'assigner la valeur de ces coëfficients; mais on n'a traité qu'un seul cas d'un problème plus général, qui consiste à développer une fonction quelconque

en une suite infinie de sinus ou de cosinus d'arcs multiples. Cette question est liée à la théorie des équations aux différences partielles et a été agitée dès l'origine de cette analyse. Il était nécessaire de la résoudre pour intégrer convenablement les équations de la propagation de la chaleur; nous allons en exposer la solution.

On examinera, en premier lieu, le cas où il s'agit de réduire en une série de sinus d'arcs multiples, une fonction dont le développement ne contient que des puissances impaires de la variable. Désignant une telle fonction par φx, on posera l'équation

$$\varphi x = a \sin. x + b \sin. 2x + c \sin. 3x + d \sin. 4x + \ldots \text{ etc.}$$

et il s'agit de déterminer la valeur des coëfficients $a, b, c, d,$ etc. On écrira d'abord l'équation

$$\varphi x = x\varphi' 0 + \frac{x^2}{2}\varphi'' 0 + \frac{x^3}{2.3}\varphi''' 0 + \frac{x^4}{2.3.4}\varphi^{\text{IV}} 0 + \frac{x^5}{2.3.4.5}\varphi^{\text{V}} 0 + \ldots \text{ etc.}$$

dans laquelle $\varphi' 0$, $\varphi'' 0$, $\varphi''' 0$, $\varphi^{\text{IV}} 0$, etc. désignent les valeurs que prennent les coëfficients

$$\frac{d.\varphi x}{dx}, \frac{d^2.\varphi x}{dx^2}, \frac{d^3.\varphi x}{dx^3}, \frac{d^4.\varphi x}{dx^4}, \text{ etc.}$$

lorsqu'on y suppose $x = 0$. Ainsi en représentant le développement selon les puissances de x par l'équation

$$\varphi x = \mathrm{A}x - \mathrm{B}\frac{x^3}{2.3} + \mathrm{C}\frac{x^5}{2.3.4.5} - \mathrm{D}\frac{x^7}{2.3.4.5.6.7} + \mathrm{E}\frac{x^9}{2.3.4.5.6.7.8.9} - \text{etc.}$$

on aura

$$\begin{array}{ll} \varphi\, o = o & \text{et } \varphi'\, o = A \\ \varphi''\, o = o & \varphi'''\, o = B \\ \varphi^{\text{IV}}\, o = o & \varphi^{\text{V}}\, o = C \\ \varphi^{\text{VI}}\, o = o & \varphi^{\text{VII}}\, o = D \\ \text{etc.} & \text{etc.} \end{array}$$

Si maintenant on compare l'équation précédente à celle-ci

$$\varphi x = a \sin. x + b \sin. 2x + c \sin. 3x + d \sin. 4x + e \sin. 5x + \text{etc.}$$

En développant le second membre par rapport aux puissances de x, on aura les équations

$$\begin{array}{l} A = a + 2\,b + 3\,c + 4\,d + 5\,e + \text{etc.} \\ B = a + 2^3 b + 3^3 c + 4^3 d + 5^3 e + \text{etc.} \\ C = a + 2^5 b + 3^5 c + 4^5 d + 5^5 e + \text{etc.} \\ D = a + 2^7 b + 3^7 c + 4^7 d + 5^7 e + \text{etc.} \\ E = a + 2^9 b + 3^9 c + 4^9 d + 5^9 e + \text{etc.} \qquad (a) \\ \qquad\qquad \text{etc.} \end{array}$$

Ces équations doivent servir à trouver les coëfficients a, b, c, d, e, etc., dont le nombre est infini. Pour y parvenir, on regardera d'abord comme déterminé et égal à m le nombre des inconnues, et l'on conservera un pareil nombre m d'équations; ainsi l'on supprimera toutes les équations qui suivent les m premières, et l'on omettra dans chacune de ces équations tous les termes du second membre qui suivent les m premières que l'on conserve. Le nombre entier m étant donné, les coëfficients a, b, c, d, e.... etc.

ont des valeurs fixes que l'on peut trouver par l'élimination. On obtiendrait pour ces mêmes quantités des valeurs différentes, si le nombre des équations et celui des inconnues était plus grand d'une unité. Ainsi la valeur des coëfficients varie à mesure que l'on augmente le nombre de ces coëfficients et celui dss équations qui doivent les déterminer. Il s'agit de chercher quelles sont les limites vers lesquelles les valeurs des inconnues convergent continuellement à mesure que le nombre des équations devient plus grand. Css limites sont les véritables valeurs des inconnues qui satisfont aux équations précédentes lorsque leur nombre est infini.

208.

On considérera donc successivement les cas où l'on aurait à déterminer une inconnue par une équation, deux inconnues par deux équations, trois inconnues par trois équations, ainsi de suite à l'infini. Supposons que l'on designe comme il suit différents systêmes d'équations analogues à celles dont on doit tirer les valeurs des coëfficients :

$$a_1 = A_1 \qquad a_2 + 2\,b_2 = A_2 \qquad a_3 + 2\,b_3 + 3\,c_3 = A_3 \qquad a_4 + 2\,b_4 + 3\,c_4 + 4\,d_4 = A_4$$

$$a_2 + 2^3 b_2 = B_2 \qquad a_3 + 2^3 b_3 + 3^3 c_3 = B_3 \qquad a_4 + 2^3 b_4 + 3^3 c_4 + 4^3 d_4 = B_4$$

$$a_3 + 2^5 b_3 + 3^5 c_3 = C_3 \qquad a_4 + 2^5 b_4 + 3^5 c_4 + 4^5 d_4 = C_4$$

$$a_4 + 2^7 b_4 + 3^7 c_4 + 4^7 d_4 = D_4$$

$$a_5 + 2\,b_5 + 3\,c_5 + 4\,d_5 + 5\,e_5 = A_5$$

$$a_5 + 2^3 b_5 + 3^3 c_5 + 4^3 d_5 + 5^3 e_5 = B_5$$

$$a_5 + 2^5 b_5 + 3^5 c_5 + 4^5 d_5 + 5^5 e_5 = C_5$$

$$a_5 + 2^7 b_5 + 3^7 c_5 + 4^7 d_5 + 5^7 e_5 = D_5$$

$$a_5 + 2^9 b_5 + 3^9 c_5 + 4^9 d_5 + 5^9 e_5 = E_5$$

etc. (*b*)

Si maintenant on élimine la dernière inconnue e_5, au moyen des cinq équations qui contiennent A_5 B_5 C_5 D_5E_5, etc. on trouvera

$$a_5(5^2-1^2)+2\,b_5(5^2-2^2)+3\,c_5(5^2-3^2)+4\,d_5(5^2-4^2)=5^2\,A_5-B_5$$

$$a_5(5^2-1\,)+2^3\,b_5(5^2-2^2)+3^3\,c_5(5^2-3^2)+4^3\,d_5(5^2-4^2)=5^2\,B_5-C_5$$

$$a_5(5^2-1\,)+2^5\,b_5(5^2-2^2)+3^5\,c_5(5^2-3^2)+4^5\,d_5(5^2-4^2)=5^2\,C_5-D_5$$

$$a_5(5^2-1\,)+2^7\,b_5(5^2-2^2)+3^7\,c_5(5^2-3^2)+4^7\,d_5(5^2-4^2)=5^2\,D_5-E_5$$

On aurait pu déduire ces quatre équations des quatre qui forment le systême précédent, en mettant dans ces dernières au lieu de

$$\begin{array}{ll} a_4 & (5^2-1\,)\,a_5 \\ b_4 & (5^2-2^2)\,b_5 \\ c_4 & (5^2-3^2)\,c^5 \\ d_4 & (5^2-4^2)\,d_5 \end{array}$$

et au lieu de

$$\begin{array}{ll} A_4 & 5^2\,A_5-B_5 \\ B_4 & 5^2\,B_5-C_5 \\ C_4 & 5^2\,C_5-D_5 \\ D_4 & 5^2\,D_5-E_5 \end{array}$$

On pourra toujours, par des substitutions semblables, passer du cas qui répond à un nombre m d'inconnues à celui qui répond à un nombre $m+1$. En écrivant par ordre

toutes ces relations entre les quantités qui répondent à l'un des cas et celles qui répondent au cas suivant, on aura

$$
\begin{array}{llllll}
a_1 = a_2(2^2-1) & & & & & \\
a_2 = a_3(2^2-1) & b_2 = b_3(3^2-2^2) & & & & \\
a_3 = a_4(4^2-1) & b_3 = b_4(4^2-2^2) & c_3 = c_4(4^2-3^2) & & & \\
a_4 = a_5(5^2-1) & b_4 = b_5(5^2-2^2) & c_4 = c_5(5^2-3^2) & d_4 = d_5(5^2-4^2) & & \\
a_5 = a_6(6^2-1) & b_5 = b_6(6^2-2^2) & c_5 = c_6(6^2-3^2) & d_5 = d_6(6^2-4^2) & e_5 = e_6(6^2-5^2) & \\
a_6 = a_7(7^2-1) & b_6 = b_7(7^2-2^2) & c_6 = c_7(7^2-3^2) & d_6 = d_7(7^2-4^2) & e_6 = e_7(7^2-5^2) & f_6 = f_7(7^2-6^2)\,;
\end{array}
\qquad (c)
$$

etc.

on aura aussi

$$
\begin{array}{llll}
A_1 = 2\,A_2 - B_2 & & & \\
A_2 = 3\,A_3 - B_3 & B_2 = 3\,B_3 - C_3 & & \\
A_3 = 4\,A_4 - B_4 & B_3 - 4\,B_4 - C_4 & C_3 = 4\,C_4 - D_4 & \\
A_4 = 5\,A_5 - B_5 & B_4 = 5\,B_5 - C_5 & C_4 = 5\,C_5 - D_5 & D_4 = 5\,D_5 - E_5\,,
\end{array}
\qquad (d)
$$

etc.

On conclut des équations (c) qu'en représentant par $a, b, c, d, e, \ldots$ etc., les inconnues dont le nombre est infini, on doit avoir

$$
\begin{aligned}
a &= \frac{a_1}{(2^2-1)(3^2-1)(4^2-1)(6^2-1)\ldots\ldots} \\
b &= \frac{b_2}{(3^2-2^2)(4^2-2^2)(5^2-2^2)(6^2-2^2)\ldots\ldots} \\
c &= \frac{c_3}{(4^2-3^2)(5^2-3^2)(6^2-3^2)(7^2-3^2)\ldots\ldots} \\
d &= \frac{d_4}{(5^2-4^2)(6^2-4^2)(7^2-4^2)(8^2-4^2)\ldots\ldots}
\end{aligned}
$$

etc. (e)

209.

Il reste donc à déterminer les valeurs de a_1 b_2 c_3 d_4 e_5 etc.: la première est donnée par une équation, dans laquelle entre A_1; la seconde est donnée par deux équations dans lesquelles entrent A_2 B_2; la troisième est donnée par trois équations, dans lesquelles entrent $A_3 B_3 C_3$, ainsi de suite. Il suit de là que si l'on connaissait les valeurs de

$$A_1 \quad A_2 B_2 \quad A_3 B_3 C_3 \quad A_4 B_4 C_4 D_4 \ldots \text{ etc.},$$

on trouverait facilement a_1 en résolvant une équation, a_2 b_2 en résolvant deux équations, $a_3 b_3 c_3$ en résolvant trois équations, ainsi de suite; après quoi on déterminerait $a, b, c, d, e,$ etc. Il s'agit maintenant de calculer les valeurs de

$$A_1 \quad A_2 B_2 \quad A_3 B_3 C_3 \quad A_4 B_4 C_4 D_4 \quad A_5 B_5 C_5 D_5 E_5 \text{ etc.},$$

au moyen des équations (d). 1° on trouvera la valeur de A_1 en A_2 et B_2; 2° par deux substitutions on trouvera cette valeur de A_1 en $A_3 B_3 C_3$; 3° par trois substitutions on trouvera la même valeur de A_1 en $A_4 B_4 C_4 D_4$, ainsi de suite. Ces valeurs successives de A_1 sont :

$$A_1 = A_2\, 2^2 - B_2$$
$$A_1 = A_3\, 2^2.3^2 - B_3(2^2+3^2) + C_3$$
$$A_1 = A_4\, 2^2.3^2.4^2 - B_4(2^2.3^2+2^2.4^2+3^2.4^2) + C_4(2^2+3^2+4^2) - D_4$$
$$A_1 = A_5\, 2^2.3^2.4^2.5^2 - B_5(2^2.3^2.4^2+2^2.3^2.5^2+2^2.4^2.5^2+3^2.4^2.5^2)$$
$$+ C_5(2^2.3^2+2^2.4^2+2^2.5^2+3^2.4^2+3^2.5^2+4^2.5^2) - D_5(2^2+3^2+4^2+5^2) + E_5,$$

etc.,

dont il est aisé de remarquer la loi. La dernière de ces valeurs, qui est celle que l'on veut déterminer, contient les

quantités A, B, C, D, E, etc. avec un indice infini, et ces quantités sont connues; elles sont les mêmes que celles qui entrent dans les équations (*a*).

En divisant cette dernière valeur de A_1 par le produit infini

$$2^2.3^2.4^2.5^2.6^2\ldots\ldots \text{ etc.},$$

on a

$$\begin{aligned} A - B\left(\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{4^2}+\frac{1}{5^2}+\text{etc.}\right) &+ C\left(\frac{1}{2^2.3^2}+\frac{1}{2^2.4^2}+\frac{1}{3^2.4^2}+\text{etc.}\right) \\ &+ D\left(\frac{1}{2^2.3^2.4^2}+\frac{1}{2^2.3^2.5^2}+\frac{1}{3^2.4^2.5^2}+\text{etc.}\right) \\ &+ E\left(\frac{1}{2^2.3^2.4^2.5^2}+\frac{1}{2^2.3^2.4^2.6^2}+\text{etc.}\right) \\ &+ \text{etc.} \end{aligned}$$

Les coëfficients numériques sont les sommes des produits que l'on formerait par les diverses combinaisons des fractions $\frac{1}{1^2}\,\frac{1}{2^2}\,\frac{1}{3^2}\,\frac{1}{4^2}\,\frac{1}{5^2}\,\frac{1}{6^2}\ldots\ldots$ et, après avoir séparé la première fraction $\frac{1}{1^2}$. Si l'on représente ces différentes sommes de produits par $P_1\,Q_1\,R_1\,S_1\,T_1\ldots$ etc., et si l'on emploie la première des équations (*e*) et la première des équations (*b*), on aura, pour exprimer la valeur du premier coëfficient *a*, l'équation

$$a\,\frac{(2^2-1)(3^2-1)(4^2-1)(5^2-1)\ldots}{2^2.3^2.4^2.5^2\ldots} = A - BP_1 + CQ_1 - DR_1 + ES_1 - FT_1 + \text{etc.};$$

or les quantités $P_1\,Q_1\,R_1\,S_1\,T_1\ldots$ etc., peuvent être facilement déterminées comme on le verra plus bas; donc le premier coëfficient *a* sera entièrement connu.

210.

Il faut passer maintenant à la recherche des coëfficients suivants $bcdef\ldots$ etc., qui d'après les équations (e) dépendent des quantités $b_2 c_3 d_4 e_5 f_6 \ldots$ etc. On reprendra pour cela les équations (b); la première a déja été employée pour trouver la valeur de a_1; les deux suivantes donnent la valeur de b_2; les trois suivantes la valeur de c_3; les quatre suivantes la valeur de d_4, ainsi de suite.

En effectuant le calcul, on trouvera, à la seule inspection des équations, pour les valeurs de $b_2 c_3 d_4 e_5 \ldots$ etc, les résultats suivants :

$$2b_2(1^2-2^2) = A_2\, 1^2 - B_2$$

$$3c_3(1^2-3^2)(2^2-3^2) = A_3\, 1^2.2^2 - B_3(1^2+2^2) + C_3$$

$$4d_4(1^2-4^2)(2^2-4^2)(3^2-4^2) = A_4\, 1^2.2^2.3^2 - B_4(1^2.2^2+1^2.3^2+2^2.3^2) + C_4(1^2+2^2+3^2) - D_4$$

$$5e_5(1^2-5^2)(2^2-5^2)(3^2-5^2)(4^2-5^2) = A_5\, 1^2.2^2.3^2.4^2 - B_5(1^2.2^2.3^2+1^2.2^2.4^2+1^2.3^2.4^2+2^2.3^2.4^2)$$
$$+ C_5(1^2.2^2+1^2.3^2+1^2.4^2+2^2.3^2+2^2.4^2+3^2.4^2) - D_5(1^2+2^2+3^2+4^2) + E_5$$

etc.

La loi que suivent ces équations est facile à saisir; il ne reste plus qu'à déterminer les quantités

$$A_2 B_2 \quad A_3 B_3 C_3 \quad A_4 B_4 C_4 \text{ etc.}$$

Or, les quantités $A_2 B_2$ peuvent être exprimées en $A_3 B_3 C_3$, ces dernières en $A_4 B_4 C_4 D_4$ etc. Il suffit pour cela d'opérer les substitutions indiquées par les équations (d); ces changements successifs réduiront les seconds membres des équations précédentes à ne contenir que les quantités ABCD etc., avec un indice infini, c'est-à-dire, les quantités connues

ABCD etc. qui entrent dans les équations (a); les coëfficients seront les différents produits que l'on peut faire en combinant les quarrés des nombres $1^2\ 2^2\ 3^2\ 4^2\ 5^2$ à l'infini. Il faut seulement remarquer que le premier de ces quarrés 1^2 n'entrera point dans les coëfficients de la valeur de a_1; que le second quarré 2^2 n'entrera point dans les coëfficients de la valeur de b_2; que le troisième quarré 3^2 sera seul omis parmi ceux qui servent à former les coëfficients de la valeur de c_3, ainsi du reste à l'infini. On aura donc pour les valeurs de $b_2 c_3 d_4 e_5$ etc., et par conséquent pour celles de $b\,c\,d\,e$ etc., des résultats entièrement analogues à celui que l'on a trouvé plus haut pour la valeur du premier coëfficient a_1.

211.

Si maintenant on représente

par P_2 les quantités $\left\{\frac{1}{1^2}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{4^2}+\frac{1}{5^2}+\ldots\right\}$

Q_2 $\left\{\frac{1}{1^2.3^2}+\frac{1}{1^2.4^2}+\frac{1}{1^2.5^2}+\frac{1}{3^2.4^2}+\frac{1}{3^2.5^2}+\ldots\right\}$

R_2 $\left\{\frac{1}{1^2.3^2.4^2}+\frac{1}{1^2.3^2.5^2}+\frac{1}{3^2.3^2.4^2}+\frac{1}{3^2.4^2.5^2}+\ldots\right\}$

S_2 $\left\{\frac{1}{1^2.3^2.4^2.5^2}+\frac{1}{1^2.4^2.5^2.6^2}+\ldots\right\}$

etc.,

que l'on forme par les combinaisons des fractions

$$\frac{1}{1^2}\ \frac{1}{2^2}\ \frac{1}{3^2}\ \frac{1}{4^2}\ \frac{1}{5^2}\ldots \text{ etc.,}$$

à l'infini, en omettant la seconde de ces fractions $\frac{1}{2^2}$; on aura, pour déterminer la valeur de b, l'équation

$$2\,b_2\,\frac{(1^2-2^2)}{1^2.3^2.4^2.5^2.6^2\ldots}=A_2-BP_2+CQ_2-DR_2+ES_2-FT_2+\text{etc.}$$

En représentant en général par $P_n\,Q_n\,R_n\,S_n\,T_n\ldots\ldots$ les sommes des produits que l'on peut faire en combinant diversement toutes les fractions $\frac{1}{1^2}\,\frac{1}{2^2}\,\frac{1}{3^2}\,\frac{1}{4^2}\,\frac{1}{5^2}\ldots\ldots$ à l'infini, après avoir seulement omis la fraction $\frac{1}{n^2}$; on aura en général, pour déterminer les quantités $a_1\,b_2\,c_3\,d_4\,e_5\ldots$ etc., les équations suivantes :

$$A_1-BP_1+CQ_1-DR_1+ES_1-\text{etc.}=a_1\,\frac{1}{2^2.3^2.4^2.5^2\ldots}$$

$$A_2-BP_2+CQ_2-DR_2+ES_2-\text{etc.}=3b_2\,\frac{(1^2-2^2)}{1^2.3^2.4^2.5^2\ldots}$$

$$A_3-BP_3+CQ_3-DR_3+ES_3-\text{etc.}=3c_3\,\frac{(1^2-3^2)\,(2^2-3^2)}{1^2.2^2.4^2.5^2.6^2\ldots}$$

$$A_4-BP_4+CQ_4-DR_4+ES_4-\text{etc.}=4d_4\,\frac{(1^2-4^2)\,(2^2-4^2)\,(3^2-4^2)}{1^2.2^2.3^2.5^2.6^2\ldots}$$

etc.

212.

Si l'on considère maintenant les équations (e) qui donnent les valeurs des coëfficients $a\,b\,c\,d\ldots$ etc., on aura les résultats suivants :

$$a\,\frac{(2^2-1^2)(3^2-1^2)(4^2-1^2)(5^2-1^2)\ldots}{2^2.3^2.4^2.5^2\ldots}=A-BP_1+CQ_1-DR_1+ES_1-FT_1+\text{etc.}$$

$$2b\,\frac{(1^2-2^2)(3^2-2^2)(4^2-2^2)(5^2-2^2)\ldots}{1^2.3^2.4^2.5^2}=A-BP_2+CQ_2-DR_2+ES-\text{etc.}$$

$$3c\,\frac{(1^2-3^2)(3^2-3^2)(4^2-3^2)(5^2-3^2)\ldots}{1^2.2^2.4^2.5^2}=A-BP_3+CQ_3-DR_3+ES_3-\text{etc.}$$

$$4d\,\frac{(1^2-4^2)(2^2-4^2)(3^2-4^2)(5^2-4^2)\ldots}{1^2.2^2.3^2.5^2}=A-BP_4+CQ_4-DR_4+ES_4-\text{etc.}$$

etc.

En distinguant quels sont les facteurs qui manquent aux numérateurs et aux dénominateurs pour y compléter la double série des nombres naturels, on voit que la fraction se réduit, dans la première équation, à $\frac{1}{1}\cdot\frac{1}{2}$; dans la seconde à $-\frac{2}{2}\cdot\frac{2}{4}$; dans la troisième à $\frac{3}{3}\cdot\frac{3}{6}$; dans la quatrième à $-\frac{4}{4}\cdot\frac{4}{8}$; en sorte que les produits qui multiplient

$$a,\ 2b,\ 3c,\ 4d,\ \text{etc.},$$

sont alternativement $\frac{1}{2}$ et $-\frac{1}{2}$. Il ne s'agit donc plus que de trouver les valeurs de

$$P_1\,Q_1\,R_1\,S_1\quad P_2\,Q_2\,R_2\,S_2\quad P_3\,Q_3\,R_3\,S_3\ldots\ \text{etc.}$$

Pour y parvenir, on remarquera que l'on peut faire dépendre ces valeurs de celles des quantités PQRST... etc., qui représentent les différents produits que l'on peut former avec les fractions $\frac{1}{1^2}\ \frac{1}{2^2}\ \frac{1}{3^2}\ \frac{1}{4^2}\ \frac{1}{5^2}\ \frac{1}{6^2}\ldots$ etc., sans en omettre

aucune. Quant à ces derniers produits, leurs valeurs sont données par les séries des développements de sinus. Nous représenterons donc les séries

$$\frac{1}{1^2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{4^2}+\frac{1}{5^2}+\text{etc.} \qquad \text{par P},$$

$$\frac{1}{1^2.2^2}+\frac{1}{1^2.3^2}+\frac{1}{1^2.4^2}+\frac{1}{2^2.3^2}+\frac{1}{2^2.4^2}+\frac{1}{3^2.4^2}+\text{etc.} \quad \text{par Q},$$

$$\frac{1}{1^2.2^2.3^2}+\frac{1}{1^2.2^2.4^2}+\frac{1}{1^2.3^2.4^2}+\frac{1}{2^2.3^2.4^2}+\text{etc.} \qquad \text{par R},$$

$$\frac{1}{1^2.2^2.3^2.4^2}+\frac{1}{2^2.3^2.4^2.5^2}+\frac{1}{1^2.2^2.3^2.5^2}+\text{etc.} \qquad \text{par S},$$

ainsi de suite.

La série $\sin.x = x - \frac{x^3}{2.3} + \frac{x^5}{2.3.4.5} + \frac{x^7}{2.3.4.5.6.7} + \text{etc.};$

nous fournira les quantités P Q R S T etc. En effet, la valeur du sinus étant exprimée par l'équation

$$\sin.x = x\left(1-\frac{x^2}{1^2.\pi^2}\right)\left(1-\frac{x^2}{2^2.\pi^2}\right)\left(1-\frac{x^2}{3^2.\pi^2}\right)\left(1-\frac{x^2}{4^2.\pi^2}\right)\left(1-\frac{x^2}{5^2.\pi}\right)\text{etc.}$$

on aura $1-\frac{x^2}{2.3}+\frac{x^4}{2.3.4.5}-\frac{x^6}{2.3.4.5.6.7}+\text{etc.}$

$$=\left(1-\frac{x^2}{1^2.\pi^2}\right)\left(1-\frac{x^2}{2^2.\pi^2}\right)\left(1-\frac{x^2}{2^2.\pi^2}\right)\left(1-\frac{x^2}{2^2.\pi^2}\right)\ldots\text{etc.},$$

d'où l'on conclut immédiatement

$$P = \frac{\pi^2}{2.3}$$

$$Q = \frac{\pi^4}{2.3.4.5}$$

$$R = \frac{\pi^6}{2.3.4.5.6.7}$$

$$S = \frac{\pi^7}{2.3.4.5.6.7.8.9}$$

etc.

213.

Supposons maintenant que $P_n Q_n R_n S_n$... etc., représentent les sommes de produits différents que l'on peut faire avec les fractions $\frac{1}{1^2}\frac{1}{2^2}\frac{1}{3^2}\frac{1}{4^2}\frac{1}{5^2}\ldots$ etc., dont on aura séparé la fraction $\frac{1}{n^2}$, n étant un nombre entier quelconque; il s'agit de déterminer $P_n Q_n R_n S_n$... etc., au moyen de $PQRS$... etc. Si l'on désigne par $1 - qP_n + q^2 Q_n - q^3 R_n + q^4 S_n -$ etc., les produits des facteurs

$$\left(1 - \frac{q}{1^2}\right)\left(1 - \frac{q}{2^2}\right)\left(1 - \frac{1}{3^2}\right)\left(1 - \frac{q}{4^2}\right)\ldots \text{ etc.},$$

parmi lesquels on aurait omis le seul facteur $1 - \frac{q}{n^2}$: il faudra qu'en multipliant par $1 - \frac{q}{n^2}$ la quantité

$$1 - qP_n + q^2 Q_n - q^3 R_n + q^4 S_n - \text{etc.},$$

on trouve $1 - qP + q^2 Q - q^3 R + q^4 S -$ etc.

Cette comparaison donne les relations suivantes :

$$P_n + \frac{1}{n^2} = P$$

$$Q_n + P_n \cdot \frac{1}{n^2} = Q$$

$$R_n + Q_n \cdot \frac{1}{n^2} = R$$

$$S_n + R_n \cdot \frac{1}{n^2} = S$$

etc.

$$\text{ou } P_n = P - \frac{1}{n^2}$$

$$Q_n = Q - \frac{1}{n^2} P + \frac{1}{n^4}$$

$$R_n = R - \frac{1}{n^2} Q + \frac{1}{n^4} P - \frac{1}{n^6}$$

$$S_n = S - \frac{1}{n^2} R + \frac{1}{n^4} Q - \frac{1}{n^6} P + \frac{1}{n^8}$$

etc.

En employant les valeurs connues de PQRS, et faisant successivement $n = 1, 2, 3, 4, 5 \ldots$ etc., on aura les valeurs de $P_1 Q_1 R_1 S_1 \ldots$ etc.; celles de $P_2 Q_2 R_2 S_2 \ldots$ etc.; celles de $P_3 Q_3 R_3 S_3 \ldots$ etc.

214.

Il résulte de tout ce qui précède que les valeurs de $a\,b\,c\,d\,e \ldots$ etc., déduites des équations

$$a + 2\,b + 3\,c + 4\,d + 5\,e + \text{etc.} = A$$
$$a + 2^3 b + 3^3 c + 4^3 d + 5^3 e + \text{etc.} = B$$
$$a + 2^5 b + 3^5 c + 4^5 d + 5^5 e + \text{etc.} = C$$
$$a + 2^7 b + 3^7 c + 4^7 d + 5^7 e + \text{etc.} = D$$
$$a + 2^9 b + 3^9 c + 4\,d^9 + 5\,e^9 + \text{etc.} = E$$

etc.

sont exprimées ainsi,

$$\frac{1}{2}\,a = A - B\left(\frac{\pi^2}{2.3} - \frac{1}{1^2}\right) + C\left(\frac{\pi^4}{2.3.4.5} - \frac{1}{1^2}\cdot\frac{\pi^2}{2.3} + \frac{1}{1^4}\right)$$
$$- D\left(\frac{\pi^6}{2.3.4.5.6.7} - \frac{1}{1^2}\cdot\frac{\pi^4}{2.3.4.5} + \frac{1}{1^4}\cdot\frac{\pi^2}{2.3} - \frac{1}{1^6}\right)$$
$$+ E\left(\frac{\pi^8}{2.3.4.5.6.7.8.9} - \frac{1}{1^2}\cdot\frac{\pi^6}{2.3.4.5.7} + \frac{1}{1^4}\cdot\frac{\pi^4}{2.3.4.5} - \frac{1}{1^6}\cdot\frac{\pi^2}{2.3} + \frac{1}{1^8}\right)$$
$$- \text{etc.}$$

$$-\frac{1}{2}\,2b = A - B\left(\frac{\pi^2}{2.3} - \frac{1}{2^2}\right) + C\left(\frac{\pi^4}{2.3.4.5} - \frac{1}{2^2}\cdot\frac{\pi^4}{2.3} + \frac{1}{2^4}\right)$$
$$- D\left(\frac{\pi^6}{2.3.4.5.6.7} - \frac{1}{2^2}\cdot\frac{\pi^4}{1.3.4.5} + \frac{1}{2^4}\cdot\frac{\pi^2}{2.3} - \frac{1}{2^6}\right)$$
$$+ E\left(\frac{\pi^8}{2.3.4.5.6.7.8.9} - \frac{1}{2^2}\cdot\frac{\pi^6}{2.3.4.5.7} + \frac{1}{2^4}\cdot\frac{\pi^4}{2.3.4.5} - \frac{1}{2^6}\cdot\frac{\pi^2}{2.3} + \frac{1}{2^8}\right)$$
$$- \text{etc.}$$

$$\frac{1}{2}\,3c = A - B\left(\frac{\pi^2}{2.3} - \frac{1}{3^2}\right) + C\left(\frac{\pi^4}{2.3.4.5} - \frac{1}{3^2}\cdot\frac{\pi^2}{2.3} + \frac{1}{3^4}\right)$$
$$- D\left(\frac{\pi^6}{2.3.4.5.6.7} - \frac{1}{3^2}\cdot\frac{\pi^4}{2.3.4.5} + \frac{1}{3^4}\cdot\frac{\pi^2}{2.3} - \frac{1}{3^6}\right)$$
$$+ E\left(\frac{\pi^8}{2.3.4.5.6.7.8.9} - \frac{1}{3^2}\cdot\frac{\pi^6}{2.3.4.5.7} + \frac{1}{3^4}\cdot\frac{\pi^4}{2.3.4.5} - \frac{1}{3^6}\cdot\frac{\pi^2}{2.3} + \frac{1}{3^8}\right)$$
$$- \text{etc.}$$

$$-\frac{1}{2}\,4d = A - B\left(\frac{\pi^2}{2.3} - \frac{1}{4^2}\right) + C\left(\frac{\pi^4}{3.3.4.5} - \frac{1}{4^2}\cdot\frac{\pi^4}{2.3} + \frac{1}{4^4}\right)$$
$$- D\left(\frac{2.3.4.5.6.7}{\pi^6} - \frac{1}{4^2}\cdot\frac{\pi^4}{2.3.4.5} + \frac{1}{4^4}\cdot\frac{\pi^2}{2.3} - \frac{1}{4^6}\right)$$
$$+ E\left(\frac{\pi^8}{2.3.4.5.6.7.8.9} - \frac{1}{4^2}\cdot\frac{\pi^6}{2.3.4.5.7} + \frac{1}{4^4}\cdot\frac{\pi^4}{2.3.4.5} - \frac{1}{4^6}\cdot\frac{\pi^2}{2.3} + \frac{1}{4^8}\right)$$
$$- \text{etc.}$$

etc.

215.

Connaissant les valeurs de $abcdef\ldots$ etc., on les substituera dans l'équation proposée

$$\varphi x = a \sin. x + b \sin. 2x + d \sin. 3x + e \sin. 4x + \text{etc.};$$

et mettant aussi au lieu des quantités ABCDE, etc. leurs valeurs $\varphi' o$, $\varphi''' o$, $\varphi^{v} o$, $\varphi^{vii} o$, $\varphi^{ix} o \ldots$ etc., on aura l'équation générale

$$\begin{aligned}
\tfrac{1}{2}\pi\varphi x = {} & \sin. x \left\{ \varphi' o + \varphi''' o\left(\frac{\pi^2}{2.3} - \frac{1}{1^2}\right) + \varphi^{v} o\left(\frac{\pi^4}{2.3.4.5} - \frac{1}{1^2}\cdot\frac{\pi^2}{2.3} + \frac{1}{1^2}\right) \right. \\
& \left. + \varphi^{vii} o\left(\frac{\pi^6}{2.3.4.5.6.7} - \frac{1}{1^2}\cdot\frac{\pi^4}{2.3.4.5} + \frac{1}{1^4}\cdot\frac{\pi^2}{2.3} - \frac{1}{1^6}\right) + \text{etc.} \right\} \\
& - \tfrac{1}{2}\sin. 2x \left\{ \varphi' o + \varphi''' o\left(\frac{\pi^2}{2.3} - \frac{1}{2^2}\right) + \varphi^{v} o\left(\frac{\pi^4}{2.3.4.5} - \frac{1}{2^2}\cdot\frac{\pi^2}{2.3} + \frac{1}{2^2}\right) \right. \\
& \left. + \varphi^{vii} o\left(\frac{\pi^6}{2.3.4.5.6.7} - \frac{1}{2^2}\cdot\frac{\pi^4}{2.3.4.5} + \frac{1}{2^4}\cdot\frac{\pi^2}{2.3} - \frac{1}{2^6}\right) + \text{etc.} \right\} \\
& + \tfrac{1}{3}\sin. 3x \left\{ \varphi' o + \varphi''' o\left(\frac{\pi^2}{2.3} - \frac{1}{3^2}\right) + \varphi^{v} o\left(\frac{\pi^4}{2.3.4.5} - \frac{1}{3^2}\cdot\frac{\pi^2}{2.3} + \frac{1}{3^2}\right) \right. \\
& \left. + \varphi^{vii} o\left(\frac{\pi^6}{2.3.4.5.6.7} - \frac{1}{3^2}\cdot\frac{\pi^4}{2.3.4.5} + \frac{1}{3^4}\cdot\frac{\pi^2}{2.3} - \frac{1}{3^6}\right) + \text{etc.} \right\} \\
& - \tfrac{1}{4}\sin. 4x \left\{ \varphi' o + \varphi''' o\left(\frac{\pi^2}{2.3} - \frac{1}{4^2}\right) + \varphi^{v} o\left(\frac{\pi^4}{2.3.4.5} - \frac{1}{4^2}\cdot\frac{\pi^2}{2.3} + \frac{1}{4^2}\right) \right. \\
& \left. + \varphi^{vii} o\left(\frac{\pi^6}{2.3.4.5.6.7} - \frac{1}{4^2}\cdot\frac{\pi^4}{2.3.4.5} + \frac{1}{4^4}\cdot\frac{\pi^2}{2.3} - \frac{1}{4^6}\right) + \text{etc.} \right\} \quad \text{(A)} \\
& + \text{etc.}
\end{aligned}$$

On peut se servir de la série précédente pour réduire en séries de sinus, d'arcs multiples une fonction proposée

dont le développement ne contient que des puissances impaires de la variable.

216.

Le cas qui se présente le premier est celui où l'on aurait $\varphi x = x$; on trouve alors $\varphi' 0 = 1$, $\varphi''' 0 = 0$, $\varphi^{v} 0 = 0 \ldots$, ainsi du reste. On aura donc la série

$$\frac{1}{2} x = \sin. x - \frac{1}{2} \sin. 2x + \frac{1}{3} \sin. 3x - \frac{1}{4} \sin. 4x + \text{etc.},$$

qui a été donnée par Euler.

Si l'on suppose que la fonction proposée soit x^3, on aura

$$\varphi' 0 = 0,\ \varphi''' 0 = 2.3,\ \varphi^{v} 0 = 0,\ \varphi^{vii} 0 = 0 \ldots \text{ etc.},$$

ce qui donne l'équation

$$\frac{1}{2} x^3 = \left(\pi^2 - \frac{2.3}{1^2}\right) \sin. x - \left(\pi^2 - \frac{2,3}{2^2}\right) \frac{1}{2} \sin. 2x + \left(\pi^2 - \frac{2.3}{3^2}\right) \frac{1}{.3} \sin. 3x + \text{etc.}$$

On parviendrait à ce même résultat en partant de l'équation précédente,

$$\frac{1}{2} x = \sin. x - \frac{1}{2} \sin. 2x + \frac{1}{3} \sin. 3x - \frac{1}{4} \sin. 4x + \text{etc.}$$

En effet, en multipliant chaque membre par dx, et intégrant, ou aura

$$C - \frac{x^2}{4} = \cos. x - \frac{1}{2^2} \cos. 2x + \frac{1}{3^2} \cos. 3x - \frac{1}{4^2} \cos. 4x + \text{etc.};$$

la valeur de la constante c est

$$1 - \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} - \frac{1}{4^2} + \frac{1}{5^2} - \text{etc.};$$

série dont on sait que la somme est $+\frac{1}{2}\frac{\pi^2}{2.3}$. Multipliant par dx les deux membres de l'équation

$$\frac{1}{2}\cdot\frac{\pi^2}{2.3}-\frac{x^2}{4}=\cos.\,x-\frac{1}{2^2}\cos.\,2x+\frac{1}{3^2}\cos.\,3x-\text{etc.}$$

et intégrant, on aura

$$\frac{1}{2}\frac{\pi^2.x}{2.3}-\frac{1}{2}\cdot\frac{x^3}{2.3}=\sin.\,x-\frac{1}{2^2}\cdot\sin.\,2x+\frac{1}{3^2}\sin.\,3x-\text{etc.}$$

Si maintenant on met au lieu de x, sa valeur tirée de l'équation

$$\frac{1}{2}x=\sin.\,x-\frac{1}{2}\sin.\,2x-\frac{1}{3}\sin.\,3x-\frac{1}{4}\sin.\,4x+\text{etc.},$$

on obtiendra la même équation que ci-dessus, savoir :

$$\frac{1}{2}\frac{x^3}{2.3}=\sin.\,x\left(\frac{\pi^2}{2.3}-\frac{1}{1^2}\right)-\frac{1}{2}\sin.\,2x\left(\frac{\pi^2}{2.3}-\frac{1}{2^2}\right)$$
$$+\frac{1}{3}\sin.\,3x\left(\frac{\pi^2}{2.3}-\frac{1}{3^2}\right)+\frac{1}{4}\sin.\,4x\left(\frac{\pi^2}{2.3}-\frac{1}{4^2}\right)-\text{etc.}$$

On parviendrait de la même manière à développer en séries de sinus multiples, les puissances $x^5 x^7 x^9 \ldots$ etc., et en général toute fonction dont le développement ne contiendrait que des puissances impaires de la variable.

217.

L'équation (A) (art. 216) peut être mise sous une forme plus simple que nous allons faire connaître. On remarque d'abord qu'une partie du coëfficient de sin. x, est la série

$$\varphi'0+\frac{\pi^2}{2.3}\varphi'''0+\frac{\pi^4}{2.3.4.5}\varphi^{v}0+\frac{\pi^6}{2.3.4.5.6.7}\varphi^{vii}0+\text{etc.},$$

qui représente la quantité $\frac{1}{\pi}\varphi\pi$. En effet, on a en général

$$\varphi x = \varphi 0 + x\varphi' 0 + \frac{x^2}{2}\varphi'' 0 + \frac{x^3}{2.3}\varphi''' 0 + \frac{x^4}{2.3.4}\varphi^{\text{IV}} 0 + \frac{x^5}{2.3.4.5}\varphi^{\text{V}} 0 + \ldots \text{etc.}$$

Or, la fonction φx ne contenant par hypothèse que des puissances impaires; on doit avoir $\varphi 0 = 0$, $\varphi'' 0 = 0$, $\varphi^{\text{IV}} 0 = 0$, ainsi de suite. Donc

$$\varphi x = x\varphi' 0 + \frac{x^3}{2.3}\varphi''' 0 + \frac{x^5}{2.3.4.5}\varphi^{\text{V}} 0 + \text{etc.};$$

une seconde partie du coëfficient de sin. x se trouve, en multipliant par $-\frac{1}{2}$, la série

$$\varphi''' 0 + \frac{\pi^3}{2.3}\varphi^{\text{V}} 0 + \frac{\pi^4}{2.3.4.5}\varphi^{\text{V}} 0 + \frac{\pi^6}{2.3.4.5.6.7}\cdot\varphi^{\text{VII}} 0 + \text{etc.},$$

dont la valeur est $\frac{1}{\pi}\varphi''\pi$. On déterminera de cette manière les différentes parties du coëfficient de sin. x, et celles qui composent les coëfficients de sin. $2x$, sin. $3x$, sin. $4x$, sin. $5x$. etc. On emploiera pour cela les équations:

$$\varphi' 0 + \frac{\pi^2}{2.3}\varphi^{\text{VII}} 0 + \frac{\pi^4}{2.3.4.5}\varphi^{\text{V}} 0 + \frac{\pi^6}{2.3.4.5.6.7}\varphi^{\text{VII}} 0 + \text{etc.} = \frac{1}{\pi}\varphi\pi$$

$$\varphi^{\text{III}} 0 + \frac{\pi^2}{2.3}\varphi^{\text{V}} 0 + \frac{\pi^4}{2.3.4.5}\varphi^{\text{VII}} 0 + \frac{\pi^6}{2.3.4.5.6.7}\varphi^{\text{IX}} 0 + \text{etc.} = \frac{1}{\pi}\varphi''\pi$$

$$\varphi^{\text{V}} 0 + \frac{\pi^2}{2.3}\varphi^{\text{VII}} 0 + \frac{\pi^4}{2.3.4.5}\varphi^{\text{IX}} 0 + \text{etc.} = \frac{1}{\pi}\varphi^{\text{IV}}\pi$$

$$\varphi^{\text{XII}} 0 + \frac{\pi^2}{2.3}\varphi^{\text{XI}} 0 + \text{etc.} = \frac{1}{\pi}\varphi^{\text{VI}}\pi$$

au moyen de cette réduction on donnera à l'équation (A) la forme suivante :

$$\begin{aligned}\tfrac{1}{2}\pi\varphi x = \sin.x &\left\{\varphi\pi - \tfrac{1}{1^2}\varphi''\pi + \tfrac{1}{1^4}\varphi^{\text{iv}}\pi - \tfrac{1}{6^6}\varphi^{\text{vi}}\pi + \text{etc.}\right\}\\ -\tfrac{1}{2}\sin.2x &\left\{\varphi\pi - \tfrac{1}{2^2}\varphi''\pi + \tfrac{1}{2^4}\varphi^{\text{iv}}\pi - \tfrac{1}{2^6}\varphi^{\text{vi}}\pi + \text{etc.}\right\}\\ +\tfrac{1}{3}\sin.3x &\left\{\varphi\pi - \tfrac{1}{3^2}\varphi''\pi + \tfrac{1}{3^4}\varphi^{\text{iv}}\pi - \tfrac{1}{3^6}\varphi^{\text{vi}}\pi + \text{etc.}\right\}\\ -\tfrac{1}{4}\sin.4x &\left\{\varphi\pi - \tfrac{1}{4^2}\varphi''\pi + \tfrac{1}{4^4}\varphi^{\text{iv}}\pi - \tfrac{1}{4^6}\varphi^{\text{vi}}\pi + \text{etc.}\right\}\\ +\text{etc.}\end{aligned} \qquad \text{(B)}$$

ou celle-ci

$$\begin{aligned}\tfrac{1}{2}\pi\varphi x = \varphi\pi &\left\{\sin.x - \tfrac{1}{2}\sin.2x + \tfrac{1}{3}\sin.3x - \text{etc.}\right\}\\ -\varphi''\pi &\left\{\sin.x - \tfrac{1}{2^3}\sin.2x + \tfrac{1}{3^3}\sin.3x - \text{etc.}\right\}\\ +\varphi^{\text{iv}}\pi &\left\{\sin.x - \tfrac{1}{2^5}\sin.2x + \tfrac{1}{3^5}\sin.3x - \text{etc.}\right\}\\ -\varphi^{\text{vi}}\pi &\left\{\sin.x - \tfrac{1}{2^7}\sin.2x - \tfrac{1}{3^7}\sin.3x - \text{etc.}\right\}\\ +\text{etc.}\end{aligned} \qquad \text{(C)}$$

218.

On peut appliquer l'une ou l'autre de ces formules, toutes les fois que l'on aura à développer une fonction proposée, en une série de sinus d'arcs multiples. Si par exemple la fonction proposée est $e^x - e^{-x}$, dont le développement ne contient que des puissances impaires de x, on aura

$$\frac{1}{2}\pi\cdot\frac{e^{x}-e^{-x}}{e^{\pi}-e^{-\pi}}=\left(\sin.x-\frac{1}{2}\sin.2x+\frac{1}{3}\sin.3x-\text{etc.}\right)$$
$$-\left(\sin.x-\frac{1}{2^2}\sin.2x+\frac{1}{3^2}\sin.3x-\text{etc.}\right)$$
$$+\left(\sin.x-\frac{1}{2^3}\sin.2x+\frac{1}{3^3}\sin.3x-\text{etc.}\right)$$
$$-\left(\sin.x-\frac{1}{2^6}\sin.2x+\frac{1}{3^6}\sin.3x-\text{etc.}\right)$$
$$+\left(\sin.x-\frac{1}{2^9}\sin.2x+\frac{1}{3^9}\sin.3x-\text{etc.}\right)$$
$$-\text{etc.}$$

En distinguant les coëfficients de sin. x, sin. $2x$, sin. $3x$, sin. $4x$, etc., et mettant au lieu de $\frac{1}{n}-\frac{1}{n^3}+\frac{1}{n^5}-\frac{1}{n^7}+$ etc., sa valeur $\frac{n}{n^2+1}$, on aura

$$\frac{1}{2}\pi\frac{\left(e^{x}-e^{-x}\right)}{e^{\pi}-e^{-\pi}}=\frac{\sin.x}{1+\frac{1}{1}}-\frac{\sin.2x}{2+\frac{1}{2}}+\frac{\sin.3x}{3+\frac{1}{3}}-\frac{\sin.4x}{4+\frac{1}{4}}+\text{etc.}$$

On pourrait multiplier ces applications et en déduire plusieurs séries remarquables. On a choisi l'exemple précédent parce qu'il se présente dans diverses questions relatives à la propagation de la chaleur.

219.

Nous avons supposé jusqu'ici que la fonction dont on demande le développement en séries de sinus d'arcs multiples, peut être développée en une série ordonnée, suivant les puissances de la variable x, et qu'il n'entre dans cette dernière série que des puissances impaires. On peut étendre les mêmes conséquences à des fonctions quelconques, même à celles

qui seraient discontinues et entièrement arbitraires. Pour établir clairement la vérité de cette proposition, il est nécessaire de poursuivre l'analyse qui fournit l'équation précédente (B) et d'examiner quelle est la nature des coëfficents qui multiplient $\sin. x$, $\sin. 2x$, $\sin. 3x$, $\sin. 4x$. En désignant par $\frac{s}{n}$ la quantité qui multiplie dans cette équation $\frac{1}{n}\sin. nx$, si n est impair, et $-\frac{1}{n}\sin. nx$, si n est pair; on aura

$$s = \varphi\pi - \frac{1}{n^2}\varphi''\pi + \frac{1}{n^4}\varphi^{\text{IV}}\pi - \frac{1}{n^6}\varphi^{\text{VI}}\pi + \text{etc.}$$

Considérant s comme une fonction de π, différentiant deux fois, et comparant les résultats, on trouve $s + \frac{1}{n^2}\frac{d^2 s}{d\pi^2} = \varphi\pi$; équation à laquelle la valeur précédente de s doit satisfaire. Or, l'équation $s + \frac{1}{n^2}\frac{d^2 s}{dx^2} = \varphi x$, dans laquelle s est considérée comme une fonction de x, a pour intégrale

$$s = a\cos. nx + b\sin. nx + n\sin. nx\int\cos. nx.\varphi x.dx$$
$$- n\cos. nx\int\sin. nx.\varphi x\,dx.$$

n étant un nombre entier, et la valeur de x étant égale à π, on a $s = \pm n\int\varphi x.\sin. nx\,dx$. Le signe + doit être choisi lorsque n est impair, et le signe — lorsque ce nombre est pair. On doit supposer x égal à la demi-circonférence π, après l'intégration indiquée; ce résultat se vérifie, lorqu'on développe au moyen de l'intégration par parties, le terme

$$\int\varphi x\sin. nx.dx$$

en remarquant que la fonction φx ne contient que des puissances impaires de la variable et en prenant l'intégrale depuis $x=0$ jusqu'à $x=\pi$.

On en conclut immédiatement que ce terme équivaut à

$$\pm\left(\varphi\pi - \varphi''\pi\cdot\frac{1}{n^2} + \varphi^{\text{iv}}\pi\cdot\frac{1}{n^4} - \varphi^{\text{vi}}\pi\cdot\frac{1}{n^6} + \varphi^{\text{viii}}\pi\cdot\frac{1}{n^8} + \text{etc.}\right).$$

Si l'on substitue cette valeur de $\frac{s}{n}$ dans l'équation (B), en prenant le signe $+$ lorsque le terme de cette équation est de rang impair, et le signe $-$ lorsque n est pair; on aura en général $S(\varphi x.\sin. nx.dx)$ pour le coëfficient de $\sin. nx$; on parvient de cette manière à un résultat très-remarquable exprimé par l'équation suivante :

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\pi\varphi x = {} & \sin. x\, S(\sin. x.\varphi x.dx) + \sin. 2x\, S(\sin. 2x\,\varphi x\, dx) \\ & + \sin. 3x\, S(\sin. 3x.\varphi x\, dx) \ldots\ldots + \sin. ix\, S(\sin. ix\,\varphi x\, dx) + \text{etc.};\end{aligned} \tag{D}$$

le second membre donnera toujours le développement cherché de la fonction φx, si l'on effectue les intégrations depuis $x=0$, jusqu'à $x=\pi$.

220.

On voit par-là que les coëfficients $abcdef\ldots$ etc., qui entrent dans l'équation

$$\frac{1}{2}\pi\varphi x = a\sin. x + b\sin. 2x + c\sin. 3x + d\sin. 4x + \text{etc.}$$

et que nous avons trouvés précédemment par la voie des éliminations successives, sont des valeurs intégrales définies exprimées par le terme général $S(\sin. ix.\varphi x\, dx)$, i étant le numéro du terme dont on cherche le coëfficient. Cette

remarque est importante, en ce qu'elle fait connaître comment les fonctions entièrement arbitraires peuvent aussi être développées en séries de sinus d'arcs multiples. En effet, si la fonction φx est représentée par l'ordonnée variable d'une courbe quelconque dont l'abscisse s'étend depuis $x=0$ jusqu'à $x=\pi$, et si l'on construit sur cette même partie de l'axe la courbe trigonométrique connue, dont l'ordonnée est $y=\sin. x$; il sera facile de se représenter la valeur d'un terme intégral. Il faut concevoir que pour chaque abscisse x, à laquelle répond une valeur de φx, et une valeur de $\sin. x$, on multiplie cette dernière valeur par la première, et qu'au même point de l'axe on élève une ordonnée proportionnelle au produit $\varphi x.\sin. x$. On formera, par cette opération continuelle, une troisième courbe, dont les ordonnées sont celles de la courbe trigonométrique, réduite proportionnellement aux ordonnées de la courbe arbitraire qui représente φx. Cela posé, l'aire de la courbe réduite étant prise depuis $x=0$ jusqu'à $x=\pi$, donnera la valeur exacte du coëfficient de $\sin. x$; et quelle que puisse être la courbe donnée qui répond à φx, soit qu'on puisse lui assigner une équation analytique, soit qu'elle ne dépende d'aucune loi régulière, il est évident qu'elle servira toujours à réduire d'une manière quelconque la courbe trigonométrique; en sorte que l'aire de la courbe réduite a, dans tous les cas possibles, une valeur déterminée qui donne celle du coëfficient de $\sin. x$ dans le développement de la fonction. Il en est de même du coëfficient suivant b ou $\mathrm{S}(\varphi x.\sin. 2x\, dx)$.

Il faut en général, pour construire les valeurs des coëfficients $a\,b\,c\,d\,e\ldots$ etc., imaginer que les courbes, dont les équations sont

$$y = \sin. x,\ y = \sin. 2x,\ y = \sin. 3x,\ y = \sin. 4x, \text{ etc.},$$

ont été tracées pour un même intervalle sur l'axe des x, depuis $x = 0$ jusqu'à $x = \pi$; et qu'ensuite on a changé ces courbes en multipliant toutes leurs ordonnées par les ordonnées correspondantes d'une même courbe, dont l'équation est $y = \varphi x$. Les équations des courbes réduites, sont:

$$y = \sin. x.\varphi x, y = \sin. 2x.\varphi x, y = \sin. 3x.\varphi x, y = \sin. 4x.\varphi x.. \text{etc.}$$

Les aires de ces dernières courbes, prises depuis $x = 0$ jusqu'à $x = \pi$, seront les valeurs des coëfficients $a\ b\ c\ d$ etc., dans l'équation

$$\tfrac{1}{2}\pi\varphi x = a \sin. x + b \sin. 2x + c \sin. 3x + d \sin. 4x + \text{etc.}$$

221.

On peut aussi vérifier l'équation précédente (D) (art. 220), en déterminant immédiatement les quantités $a_1 a_2 a_3 \ldots a_j$ etc., dans l'équation

$$\varphi x = a_1 \sin. x + a_2 \sin. 2x + a_3 \sin. 3x + \ldots a_j \sin. jx + \ldots \text{etc.};$$

pour cela on multipliera chacun des membres de la dernière équation, par sin. $ix.dx$, i étant un nombre entier, et l'on prendra l'intégrale depuis $x = 0$ jusqu'à $x = \pi$, on aura

$$S(\varphi x.\sin. ix.dx) = a_1 S(\sin. x \sin. ix.dx) + a_2 S(\sin. 2x.\sin. ix.dx) + \ldots a_j S(\sin. jx.\sin. ix.dx) + \ldots \text{etc.}$$

Or on peut facilement prouver, 1° que toutes les intégrales qui entrent dans le second membre, ont une valeur nulle, excepté le seul terme $a_i S(\sin. ix.\sin. ix\, dx)$; 2° que la valeur de $S(\sin. ix.\sin. ix.dx)$ est $\frac{1}{2}\pi$; d'où l'on con-

dura la valeur de a_i, qui est $\frac{S(\varphi x.\sin. ix.dx)}{\frac{1}{2}\pi}$. Tout se réduit à considérer la valeur des intégrales qui entrent dans le second membre, et à démontrer les deux propositions précédentes. L'intégrale $2S(\sin. jx.\sin. ix.dx)$, prise depuis $x=0$ jusqu'à $x=\pi$, et dans laquelle i et j sont des nombres entiers, est

$$\frac{1}{i-j}\sin.(\overline{i-j}.x)-\frac{1}{i+j}\sin.(\overline{i+j}\,x)+C.$$

L'intégrale devant commencer lorsque $x=0$, la constante C est nulle, et les nombres i et j étant entiers, la valeur de l'intégrale deviendra nulle lorsqu'on fera $x=\pi$; il s'ensuit que chacun des termes tels que

$$a_1 S(\sin. x\sin. ix.dx),\ a_2 S(\sin. 2x.\sin. ix.dx),\ a_3 S(\sin. 3x\sin. ix.dx)\text{ etc.}$$

s'évanouit, et que cela aura lieu toutes les fois que les nombres i et j seront différents. Il n'en est pas de même lorsque les nombres i et j sont égaux, car le terme $\frac{1}{i-j}\sin.(\overline{i-j}x)$ auquel se réduit l'intégrale, devient $\frac{0}{0}$, et sa valeur est π. On a parconséquent $2S(\sin. ix.\sin. ix.dx)=\pi$; on obtient ainsi de la manière la plus briève, les valeurs de $a_1\,a_2\,a_3\,a_4\ldots a_i$ etc. qui sont :

$$a_1=\frac{S(\varphi x.\sin. x.dx)}{\frac{1}{2}\pi},\ a_2=\frac{S(\varphi x.\sin. 2x.dx)}{\frac{1}{2}\pi},$$
$$a_3=\frac{S(\varphi x.\sin. 3x.dx)}{\frac{1}{2}\pi}\ldots\ a_i=\frac{S(\varphi x.\sin. ix.dx)}{\frac{1}{2}\pi}.$$

En les substituant on a

$$\frac{1}{2}\pi\varphi x = \sin.\ x\ \mathrm{S}(\varphi x \sin. x . dx) + \sin. 2x\,\mathrm{S}(\varphi x . \sin. 2x . dx)$$
$$+ \sin. 3x\,\mathrm{S}(\varphi . x \sin. 3x . dx) \ldots + \sin. ix\,\mathrm{S}(\varphi x \sin. ix . dx)$$
$$+ \text{etc.}$$

222.

Le cas le plus simple est celui où la fonction donnée a une valeur constante pour toutes les valeurs de la variable x comprises entre o et π; dans ce cas, l'intégrale $\int \sin. ix\, dx$ est égale à $\frac{2}{i}$ si le nombre i est impair, et égal à o si le nombre i est pair. On en déduit l'équation

$$\frac{1}{2}\pi = \sin. x + \frac{1}{3}\sin. 3x + \frac{1}{5}\sin. 5x + \frac{1}{7}\sin. 7x + \frac{1}{9}\sin. 9x + \text{etc.}$$

que l'on a trouvée précédemment.

Il faut remarquer que lorsqu'on a développé une fonction φx en une suite de sinus d'arcs multiples la valeur de la série $a \sin. x + b \sin. 2x + c \sin. 3x + d \sin. 4x +$ etc. est la même que celle de la fonction φx tant que la variable x est comprise entre o et π; mais cette égalité cesse en général d'avoir lieu lorsque la valeur de x surpasse le nombre π.

Supposons que la fonction dont on demande le développement soit x, on aura, d'après le théorême précédent,

$$\frac{1}{2}\pi x = \sin. x \int x \sin. x\, dx + \sin. 2x \int x \sin. 2x\, dx$$
$$+ \sin. 3x \int x \sin. 3x\, dx + \sin. 4x \int x \sin. 4x\, dx + \text{etc.}$$

L'intégrale $\int_0^\pi x \sin. ix\, dx$ équivaut à $\pm \frac{\pi}{i}$, les indices o et π qui sont joints au signe $\int$ font connaître les limites de l'in-