

## LES AXIOMES DE LA GÉOMÉTRIE

I. — Des hypothèses qui servent de base à la géométrie (*Abhandl. der königl. Gesellsch. d. Wissensch. zu Göttingen*, Bd. XIII) par B. Riemann. — II. Des faits qui servent de base à la géométrie (*Nachrichten von d. königl. G. der Wiss. zu Göttingen*, 3 juin 1868), par H. Helmholtz. — III. *Saggio di Interpretazione della Geometria non-Euclidea*, par E. Beltrami. Naples 1868. — IV. *Theoria fondamentale degli spazi di curvatura costante*, par le même (*Annali di Matematic.*, sér. II, tome II, fasc. III, pp. 232-55). — V. Sur la transformation des expressions différentielles du second degré, par E. B. Christoffel. *Journal für reine u. angew. Mathematik*, Bd. LXX, p. 46. — VI. Recherches sur les fonctions intégrales homogènes de  $n$  différentielles, par R. Lipschitz. *Id.*, p. 71.

La question de l'origine et de l'établissement des axiomes de la géométrie est l'une de ces vieilles énigmes dont la solution a donné naissance aux discussions les plus prolongées, aux opinions les plus contradictoires parmi les métaphysiciens. C'est une question qui peut, il me semble, intéresser tous ceux qui ont étudié les mathématiques, fût-ce les éléments seulement, et qui touche, en même temps aux problèmes les plus élevés que nous présente la nature de la pensée humaine. Dans ces derniers temps, le côté mathématique de la question a attiré l'attention de plusieurs mathématiciens. Le premier des travaux qui sont consignés dans la liste ci-dessus contient une exposition abrégée des points essentiels. Diverses parties du problème ont été étudiées dans les autres travaux, dont les uns sont antérieurs, les autres postérieurs à la publication des recherches de M. Riemann. Je vais essayer d'exposer ici la portée générale et les résultats de ces études, autant qu'il est possible de le faire, sans avoir recours à des calculs mathématiques, ni faire intervenir des formules.

Pour commencer par le cas le plus simple, occupons-nous d'abord de la géométrie à deux dimensions. L'espace que nous connaissons, dans lequel nous vivons, possède trois dimensions. Mais il n'y a pas d'impossibilité logique à concevoir l'existence d'êtres intelligents, vivant et se mouvant sur la surface d'un corps solide quelconque, incapables de percevoir autre chose que ce qui se trouve sur cette surface, et insensibles à tout ce qui est en dehors d'elle. Rien n'empêche de supposer que ces êtres pourraient trouver les lignes les plus courtes existantes dans leur espace, et se créer sur cet espace des notions géométriques appropriées à la nature particulière de leurs perceptions. Naturellement, leur espace n'aurait que deux dimensions. Si la surface qui les portait était un plan indéfini, ils pourraient reconnaître la vérité des axiomes d'Euclide. Ils trouveraient qu'entre deux points, il existe une ligne plus courte que toutes les autres (ou *géodésique*), et une seule, et que deux lignes géodésiques (droites dans ce cas spécial) parallèles chacune à une troisième, sont parallèles entre elles.

Si ces êtres vivaient au contraire sur la surface d'une sphère, leur espace n'aurait pas de limite, comme dans la première supposition, mais il ne serait pas indéfiniment étendu; et les axiomes de la géométrie seraient pour eux très-différents des nôtres, et de ceux des habitants d'une surface plane. Les lignes les plus courtes que les habitants d'une surface sphérique pourraient mener entre deux points, seraient des arcs de grands cercles. Cet axiome, qu'entre deux points il n'y a qu'une seule ligne géodésique, ne serait pas vrai pour eux sans exception; car entre deux points diamétralement opposés, ils pourraient trouver un nombre infini de ces lignes, toutes égales entre elles. De pareils êtres ne pourraient concevoir

la notion des lignes géodésiques parallèles; en effet, toutes leurs lignes géodésiques, suffisamment prolongées, iraient se couper en deux points. La somme des angles d'un triangle serait supérieure à deux angles droits, et la différence croîtrait avec la surface du triangle considéré. Il est évident que ces êtres ne pourraient concevoir la notion de la *similitude* géométrique, parce qu'il leur serait impossible de connaître des figures géométriques de même forme et de grandeurs différentes, à moins de les prendre de dimensions infiniment petites.

Supposons maintenant des êtres vivant sur une autre surface quelconque, par exemple sur celle d'un ellipsoïde. Ils pourraient construire les lignes les plus courtes entre trois points, et former ainsi un triangle géodésique. Mais s'ils construiraient de pareils triangles en différentes parties de leur espace, de manière que les trois côtés fussent toujours égaux chacun à chacun, les angles de ces divers triangles seraient différents, sauf dans certains cas particuliers. Des cercles d'égal rayon géodésique auraient des surfaces différentes et des longueurs périphériques différentes, s'ils étaient placés sur des points de la surface pour lesquels la courbure serait différente. Ainsi, dans ce cas, il ne serait plus possible, comme il l'était dans le cas du plan ou de la sphère, de construire en un point quelconque de la surface une figure superposable à une figure donnée, ou, si l'on veut, de faire mouvoir une figure sur cette surface sans changer une ou plusieurs de ses dimensions.

Gauss a démontré dans son célèbre *Traité de la courbure des surfaces*, quelle est la condition à remplir, pour qu'on puisse construire, en des points quelconques d'une surface donnée, deux figures superposables, c'est-à-dire telles qu'on puisse, en les appliquant l'une sur l'autre, les faire coïncider par toutes leurs parties. C'est que la *courbure* de cette surface — c'est-à-dire l'inverse du produit des deux rayons de courbure principaux — soit partout la même. Gauss a démontré aussi dans ce même travail que, si l'on déforme une surface, sans allonger ni raccourcir aucun de ses éléments linéaires, la courbure en chaque point de cette surface reste la même. Par exemple, un plan peut être enroulé sous forme de cylindre ou de cône; sa courbure reste toujours égale à zéro. De même, un fragment de surface sphérique peut être enroulé en une surface en forme de fuseau; c'est une expérience facile à réaliser en coupant le fond d'une vessie, lequel a une courbure sensiblement sphérique; on peut ensuite donner à cette membrane des formes diverses, représentant différentes modifications de surfaces sphériques altérées par flexion.

Or, puisque nous avons supposé qu'aucun élément linéaire de la surface n'a éprouvé ni allongement ni diminution par l'effet de cette déformation, la longueur de toutes les lignes, la grandeur de tous les angles, la surface de tous les triangles, construits sur cette surface, restent les mêmes avant et après la déformation. Il est évident, par conséquent, que le système de géométrie qui appartient aux figures construites sur une surface est indépendant d'une telle déformation qui ne change la longueur d'aucun élément linéaire.

Parmi les exemples dont nous nous sommes servi ci-dessus pour expliquer notre pensée, il se trouve deux surfaces satisfaisant à cette condition, que la courbure est la même en tous leurs points. C'est le *plan*, pour lequel la courbure

est nulle, et la *sphère*, pour laquelle la courbure peut avoir une valeur positive quelconque.

A part ces deux surfaces, on peut en construire encore d'autres dans lesquelles la courbure soit constante; seulement sa valeur est négative. M. Beltrami les a appelées *surfaces pseudosphériques*: elles ont en chaque point la forme d'une selle de cheval, convexes dans une direction, et concaves du même côté dans une direction perpendiculaire à la précédente. Ainsi, un exemple de surface pseudosphérique nous est fourni par une surface annulaire convexe du côté de l'axe, comme certains anneaux de serviette. Nous pouvons en trouver un autre exemple dans la surface extérieure d'un verre à champagne dont le corps s'élargit en haut en un rebord recourbé en dehors, et dont le pied se prolongerait en bas en une tige infiniment longue et mince. Nous pouvons, dans ces cas, considérer la surface comme infiniment étendue dans la direction perpendiculaire à l'axe, comme si elle était enroulée autour de l'axe. Mais nous ne pouvons pas, dans notre espace, construire une surface pseudosphérique indéfiniment étendue dans la direction de l'axe de révolution; nous arrivons toujours, soit à une limite, comme dans le cas du verre à champagne, soit à deux limites, comme dans le cas de l'anneau. A ces limites, le plus petit rayon de courbure devient nul et le plus grand devient infini.

Cependant, si nous supposons une surface pseudosphérique flexible, nous pouvons la traiter comme si elle était indéfiniment étendue dans toutes les directions. En effet, chaque portion de la surface qui s'approche de la limite peut se déplacer sur le reste de cette surface et s'adapter à une autre portion, où une continuation de la surface et des figures construites sur elle est possible. Ainsi, bien que nous ne puissions construire une surface pseudosphérique indéfiniment étendue simultanément dans toutes les directions, nous pouvons néanmoins construire toutes les parties de cette surface l'une après l'autre, de telle manière que chaque partie forme la continuation des autres, sans aucune interruption.

M. Beltrami a donné, dans ses mémoires sur la *Géométrie non-Euclidéenne*, une exposition très-élégante de la géométrie des figures construites sur une surface pseudosphérique; il a montré qu'on peut construire des figures parfaitement superposables à une figure quelconque donnée sur cette surface, en d'autres points quelconques de cette surface; il a démontré ainsi qu'il n'existe qu'une seule ligne géodésique entre deux points, exactement comme pour le plan. L'axiome qui concerne les lignes parallèles, au contraire, n'est plus applicable ici. Si l'on donne sur la surface une ligne géodésique, et un point en dehors de cette ligne, on peut faire passer par ce point un faisceau de lignes géodésiques qui ne rencontrent pas la première, quelque loin qu'on les suppose prolongées. Ce faisceau est limité par deux lignes géodésiques, dont la première coupe l'une des extrémités de la ligne donnée à une distance infinie, et la seconde l'autre extrémité de la même manière. Ces deux lignes ne coïncident pas l'une avec l'autre, comme dans le cas du plan. L'exposition de cette géométrie abstraite a été remarquablement simplifiée par M. Beltrami, grâce à une méthode particulière de représentation des points de la surface pseudosphérique sur un plan et dans l'intérieur d'un cercle, méthode telle, que toute ligne géodésique de la surface pseudosphérique se trouve représentée par une ligne droite sur le plan.

Il y a déjà longtemps, M. Lobatschewsky a développé synthétiquement dans sa *Théorie géométrique* un système de géométrie excluant le principe des lignes parallèles. Ce système ressemble parfaitement à la géométrie des surfaces pseudosphériques développée par M. Beltrami. Ces recherches démontrent que les trois axiomes dont nous avons parlé à plusieurs reprises contiennent la définition du plan, nécessaire et suffisante pour servir de base à la géométrie de cette surface et de toutes les surfaces qui sont développables sur un plan.

L'axiome que toutes les parties de la surface peuvent s'appliquer sur toutes les autres parties (en laissant de côté la considération des limites) distingue les trois surfaces à courbure constante de toutes les autres surfaces. L'axiome qu'il y a une seule ligne géodésique entre chaque couple de points distingue le plan de la sphère; enfin l'axiome sur les lignes parallèles distingue le plan des surfaces pseudosphériques.

La distinction entre la géométrie sphérique et la géométrie plane était évidente depuis bien longtemps, mais la signification de l'axiome sur les lignes parallèles, telle qu'elle ressort de ces recherches, ne pouvait se découvrir avant que la notion et l'étude mathématique des surfaces déformables sans changement de dimensions se fussent développées.

Nous pouvons expliquer par les notions géométriques usuelles, comme nous avons essayé de le faire, ces résultats sur les surfaces, c'est-à-dire sur les espaces étendus en deux dimensions seulement, parce que nous vivons dans un espace à trois dimensions, et que nous pouvons nous représenter par notre imagination ou bien façonner en réalité d'autres surfaces que le plan, auquel seul s'applique la géométrie d'Euclide. Mais quand nous essayons d'étendre ces recherches à l'espace à trois dimensions, la difficulté augmente, parce que nous ne connaissons en réalité l'espace que tel qu'il existe autour de nous, et que nous ne pouvons, même en idée, nous représenter aucun autre genre d'espace. Cette nouvelle partie de ces études peut cependant se poursuivre par la voie abstraite de l'analyse mathématique.

En géométrie analytique, on suppose la position d'un point déterminée par la mesure de trois quantités quelconques, qui dépendent de la situation de ce point, et que nous pouvons appeler ses coordonnées. Le choix des quantités à prendre pour coordonnées est du reste entièrement arbitraire; on admet seulement que, lorsque le point se déplace, ses coordonnées, ou au moins l'une d'elles, croissent ou diminuent d'une manière continue. Il existe, outre la situation d'un point, d'autres relations naturelles qui peuvent de même se définir par trois quantités mesurables et se transformer par degrés infiniment petits, en modifiant leurs coordonnées de la même manière. M. Riemann comprend ces objets sous le terme général de *variétés (Mannichfaltigkeiten)* de trois dimensions. Par exemple, chaque couleur peut se représenter, d'après Thomas Young et Maxwell, comme un mélange de trois quantités mesurables, de trois couleurs primitives. Par conséquent, l'espace et le système des couleurs peuvent être appelés des *variétés* de trois dimensions. Le temps serait une *variété* d'une seule dimension; le son, en considérant l'intensité et la hauteur, une *variété* de deux dimensions, etc. Entre l'espace et beaucoup d'autres *variétés* de plus d'une dimension, il existe cette différence fondamentale, que nous pouvons comparer la longueur d'une ligne quelconque, dans une direction quelconque, avec la longueur de toute autre ligne. Au con-

traire, il serait impossible de comparer quantitativement, pour un son, une différence d'intensité avec une différence de hauteur. En conséquence, le problème fondamental de la géométrie ou stéréométrie, consiste, d'après M. Riemann, à trouver une méthode qui permette de comparer la longueur d'éléments linéaires de direction différente. Dans notre géométrie actuelle, quelles que soient les coordonnées que l'on choisisse, la distance entre deux points infiniment rapprochés se présente toujours à nous comme la diagonale d'un parallépipède dont les côtés sont les accroissements correspondants des coordonnées; et sa longueur peut, par conséquent, se calculer au moyen de ce théorème bien connu de stéréométrie, qui exprime le carré de la diagonale, par la somme des carrés et des produits des côtés d'un parallépipède. M. Riemann a admis ce théorème très-général comme hypothèse, et, le prenant pour base de ses études, il a cherché quelles quantités correspondent, dans des espaces de plus de deux dimensions, à la courbure dans un espace de deux dimensions; il a démontré que ces quantités doivent être constantes dans toutes les parties de l'espace en question; et pour toutes les directions dans cet espace, pour qu'il soit possible de construire en chaque point une figure superposable par toutes ses parties à une figure quelconque donnée sur un autre point du même espace. Il s'ensuit que des corps solides de forme invariable peuvent se déplacer dans un espace à trois dimensions ou plus, avec le même degré de liberté que celui avec lequel ils peuvent se déplacer dans l'espace réel qui nous entoure, sous cette seule condition, qu'en chaque point, et dans chaque direction de l'espace dans lequel ils se déplacent, une certaine quantité analytique, qui est analogue à la mesure de courbure de Gauss, conserve une valeur constante. Si cette quantité est égale à zéro, nous avons ce que M. Riemann appelle un *espace plan*, c'est-à-dire un espace qui présente avec les espaces à plusieurs dimensions le même rapport que le plan présente avec notre espace à trois dimensions. Dans un espace plan, il n'existe qu'une ligne géodésique entre deux points donnés, et par un point donné, on ne peut mener qu'une seule ligne géodésique parallèle à une ligne géodésique donnée. L'espace plan de trois dimensions est par conséquent identique avec l'espace qui existe réellement autour de nous. La géométrie de l'espace à trois dimensions de courbure négative constante, a été développée, comme celle des surfaces par M. Lobatschewsky, et par M. Beltrami. Il y a des surfaces géodésiques, pour ainsi dire, qui sont caractérisées par cette propriété, que toute ligne géodésique qui unit deux points de ces surfaces coïncide avec elles dans toute sa longueur. Par un point donné d'un pareil espace, on peut faire passer un faisceau de surfaces géodésiques, parallèles à une surface donnée, et ne coïncidant pas les unes avec les autres. Toutes ces conséquences très-abstraites ont été très-heureusement simplifiées par M. Beltrami, comme celles qui ont trait aux surfaces pseudosphériques; en effet, il a démontré que chaque point d'un espace infini de courbure négative constante et de trois dimensions, peut être représenté par un point dans l'intérieur d'une sphère dans notre espace réel, de telle manière que toute ligne géodésique du premier soit représentée par une ligne droite dans le second, les points à distance infinie dans le premier, par la surface sphérique du second, et ainsi de suite.

Je me suis moi-même occupé de spéculations du même

ordre, comme conséquence de mes recherches sur la localisation dans le champ de vision. Une partie de mes résultats se trouvèrent semblables à ceux de M. Riemann, lorsque ceux-ci furent publiés; dans une autre partie, j'avais essayé de faire remonter encore au delà les principes fondamentaux de nos notions sur l'espace. Comme je l'ai expliqué ci-dessus, M. Riemann a admis cette forme très-générale de la valeur de la diagonale comme une hypothèse, et après avoir développé les conséquences analytiques les plus générales de cette hypothèse, il a cherché comment ces conséquences devaient se trouver limitées, si l'on faisait intervenir le principe de la superposition.

Pour moi, je suis parti du principe de la superposition, en raisonnant de la manière suivante: toute démonstration d'une égalité géométrique, est originellement basée sur ce fait, que certaines lignes, surfaces, espaces ou systèmes de points sont surperposables, c'est-à-dire applicables les uns sur les autres; ce fait que la superposition peut être observée est le fait originel sur lequel sont basées toutes nos mesures de l'espace. Pour que la notion de la surperposition puisse s'appliquer à deux figures géométriques quelconques, il est nécessaire de supposer que l'une au moins de ces deux figures peut être déplacée sans altérer sa forme, et transportée à la place qui était primitivement occupée par l'autre. La notion de la superposition implique donc la possibilité d'un mouvement dans un corps de forme invariable. Nous avons vu ci-dessus qu'un mouvement sans changement de forme n'est possible que dans certains genres particuliers d'espace. Partant de cette observation, j'ai essayé de démontrer analytiquement que, si des corps de forme invariable se déplacent avec le même degré de liberté que celui avec lequel nous les voyons se déplacer dans la réalité, il s'ensuit que ce que M. Riemann a admis comme une hypothèse doit être une réalité.

J'ai supposé, comme M. Riemann, que la situation de chaque point peut être déterminée par la mesure de trois quantités (coordonnées), qui varient par degrés infiniment petits, lorsque le point se déplace. Puisque au début de ces recherches, nous ne connaissons encore aucune méthode spéciale pour mesurer des quantités quelconques dans l'espace, nous ne pouvons donner d'un corps parfaitement solide d'autre définition que celle-ci, savoir que les coordonnées de chaque couple de points qui appartiennent à un corps solide en mouvement satisfont à une équation quel que soit le mouvement. Il faut remarquer que si le nombre de points pour chaque couple desquels existe une équation dépasse cinq, le nombre des équations correspondant à ce cas est plus grand que le nombre des quantités à déterminer, et que, par cette circonstance, la nature des équations dont il est question est très-étroitement limitée. Une liberté parfaite de mouvement est définie en supposant que chaque point d'un corps mobile, considéré isolément, est susceptible de se déplacer pour occuper un autre point quelconque de l'espace; et que les différents points du corps ne sont sujets à aucune contrainte dans leurs déplacements, si ce n'est celle qui est définie par les équations ci-dessus mentionnées subsistant entre deux d'entre eux.

Enfin, la possibilité de la superposition implique les deux conditions suivantes:

— 1° Deux systèmes de points qui sont surperposables dans

une première position quelconque du premier système, peuvent aussi se superposer l'un à l'autre dans toute autre position du premier système.

— 2° Si un corps mobile se déplace de telle manière que deux de ses points restent fixes, il reviendra à la même position, si le mouvement continue, sans être renversé.

Les deux conditions que je viens de poser expriment tout simplement ceci, que l'égalité de forme et de grandeur de deux corps, qui est démontrée par superposition, est une propriété des corps eux-mêmes, qui leur appartient indépendamment de leur situation dans l'espace, et des révolutions auxquelles ils peuvent être sujets. Si ces conditions sont remplies, les théorèmes bien connus sur les coefficients différentiels partiels des fonctions de plusieurs variables sont suffisants, comme je l'ai fait voir dans le mémoire cité ci-dessus, pour démontrer le théorème que M. Riemann a donné seulement sous forme d'hypothèse; de cette manière toutes les autres conséquences que MM. Riemann et Beltrami ont déduites de ce fondement, se déduisent aussi de ce fait que la superposition de deux figures peut être observée dans l'espace réel.

Nous résumerons les résultats de ces recherches, en disant que les axiomes sur lesquels notre système géométrique est basé ne sont pas des vérités nécessaires, dépendant seulement des lois irréfragables de notre entendement. Au contraire, divers systèmes de géométrie peuvent se développer analytiquement avec une consistance logique parfaite. Nos axiomes sont, en réalité, l'expression scientifique d'un fait d'expérience très-général, à savoir que, dans notre espace, les corps peuvent se mouvoir librement sans altération de leur forme. De ce fait d'expérience il suit que notre espace est un espace de courbure constante, mais la valeur de cette courbure ne peut être trouvée que par des mesures directes. M. Riemann, il est vrai, termine son travail par cette conclusion, qui paraît peut-être paradoxale, que les axiomes d'Euclide pourraient bien n'être qu'approximativement vrais. Ils ont été vérifiés par l'expérience, jusqu'au degré de précision que la géométrie et l'astronomie pratique ont atteint jusqu'à ce jour, et par conséquent, il n'y a aucun doute que le rayon de courbure de notre espace, s'il pouvait être sphérique ou pseudosphérique, soit infiniment grand lorsqu'on le compare aux dimensions de notre système planétaire. Mais nous ne sommes pas absolument assurés qu'il serait trouvé infini, si on le comparait avec les distances des étoiles fixes, ou avec les dimensions de l'espace lui-même.

H. HELMHOLTZ.

Professeur à l'université de Heidelberg.

(Academy.)