Hilbert

Introduction

Toute connaissance humaine commence par l'intuition, passe de là aux concepts et aboutit aux idées.

KANT, *Critique de la raison pure*, 2e partie, section 2.

1 Comme l'arithmétique, la géométrie n'exige pour son élaboration qu'un petit nombre de propositions fondamentales simples. Ces propositions sont les axiomes de la géométrie. Depuis Euclide, l'établissement de ces axiomes et l'étude de leurs relations ont fait l'objet de travaux nombreux et excellents. Ce problème est celui de l'analyse de notre intuition de l'espace.

2 Le présent travail est un nouvel essai de constituer, pour la géométrie, un système complet d'axiomes aussi simples que possible et d'en déduire les théorèmes les plus importants, de façon à mettre en évidence le rôle des divers groupes d'axiomes et la portée de chacun d'eux.

[...]

CHAPITRE I

Les cinq groupes d'axiomes

1. *Les notions fondamentales de la géométrie et les cinq groupes d'axiomes.*

1 **Définition.** Nous pensons trois systèmes différents de choses ; nous nommons les choses du premier système des *points* ; nous les désignons par des majuscules A, B, C, ... ; nous nommons *droites* les choses du deuxième système et nous les désignons par des minuscules a, b, c, ... ; nous appelons *plans* les choses du troisième système et nous les désignons par des caractères grecs α, β, γ, ... Les points constituent les éléments de la géométrie linéaire ; les points et les droites sont les éléments de la géométrie plane ; enfin les points, les droites et les plans sont ceux de la géométrie de l'espace ou de l'espace lui-même.

2 Entre les points, les droites et les plans, nous imaginons certaines relations que nous exprimons par des expressions telles que « être sur », « entre », « congruent » ; la description exacte et appropriée au but des mathématiques de ces relations est donnée par les *axiomes de la géométrie.*

3 On peut classer les axiomes de la géométrie en cinq groupes ; chacun de ces groupes exprime quelques faits fondamentaux, liés les uns aux autres et qui nous sont donnés par l'intuition. Nous désignons comme suit ces groupes d'axiomes :

(I, 1 à 8) : axiomes d'appartenance,
(II, 1 à 4) : axiomes d'ordre,
(III, 1 à 5) : axiomes de congruence,
(IV) : axiome des parallèles,
(V, 1 et 2) : axiomes de continuité.

[...]

7. *Quatrième groupe d'axiomes : parallèles.*

1 Soient un plan α, a une de ses droites et A un de ses points qui n'appartient pas à a. Dans le plan α, menons une droite c qui passe par A et qui coupe a, puis, par A, traçons une droite b telle que c coupe a et b sous des angles correspondants congruents. Le théorème de l'angle extérieur du triangle (théorème 22) montre que les droites a et b ne se coupent pas. Par conséquent, dans le plan α, par un point A extérieur à une droite a, il est possible de mener une droite qui ne coupe pas la droite a.

2 **Définition.** Deux droites coplanaires qui ne se coupent pas sont dites parallèles.

3 L'axiome des parallèles a la teneur suivante :

(IV) : **Axiome d'Euclide.** *Soient une droite a et un point A extérieur à a ; dans le plan déterminé par a et A, il existe au plus une droite qui passe par A et qui ne coupe pas a.*

4 Il résulte de ce qui précède et de l'axiome des parallèles que, par un point extérieur à une droite, il passe une unique parallèle à cette droite.

5 La portée de l'axiome (IV) est la même que celle de la proposition suivante :

6 Si deux droites coplanaires a et b ne coupent pas une droite c de leur plan, elles ne se coupent pas.

7 En effet, si a et b avaient un point commun A, dans le plan considéré, les deux droites a et b passeraient par A et cela sans couper c ; cela est en contradiction avec l'axiome (IV). Tout aussi simplement, on déduit l'axiome (IV) de la proposition précédente.

8 L'axiome des parallèles est un *axiome plan*.

9 L'introduction de l'axiome des parallèles simplifie les fondements de la géométrie et allège notablement l'élaboration de cette science.

10 Les axiomes de congruence et des parallèles conduisent facilement aux propositions suivantes :

11 **Théorème 30.** Si deux parallèles sont coupées par une sécante, les angles alternes-internes et alternes-externes sont congruents entre eux et réciproquement, la congruence des angles alternes-internes ou alternes-externes implique le parallélisme des droites données.

12 **Théorème 31.** Les angles d'un triangle font ensemble deux angles droits [1].

---

[1] Sur la question de savoir si cette proposition implique l'axiome des parallèles, voir les remarques faites à la fin du chapitre II, 4.