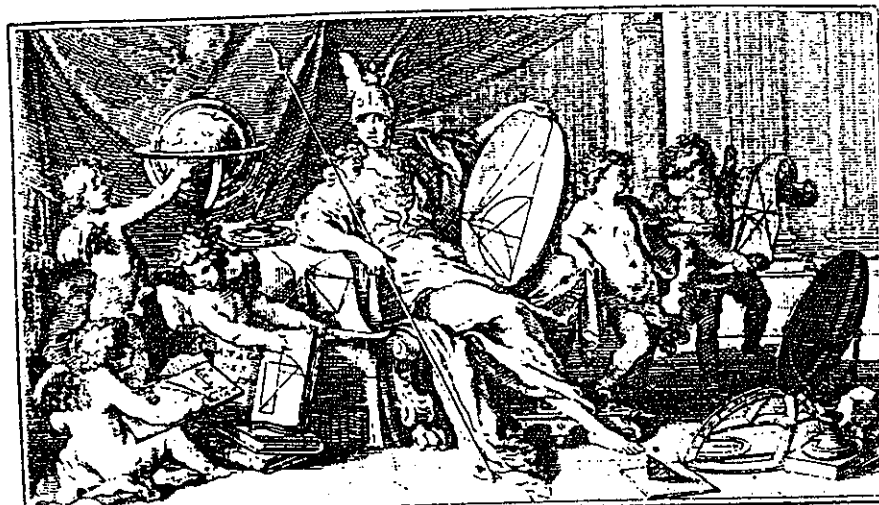


L' Hôpital



ANALYSE
DES
INFINIMENT PETITS.

PREMIERE PARTIE.
DU CALCUL DES DIFFERENCES.

SECTION PREMIERE.

Où l'on donne les regles de ce calcul.

DEFINITION I.



N appelle quantités *variables* celles qui augmentent ou diminuent continuellement; & au contraire quantités *constantes* celles qui demeurent les mêmes pendant que les autres changent. Ainsi dans une parabole les appliquées & les coupées sont des quantités variables, au lieu que le parametre est une quantité constante.

DÉFINITION II.

La portion infiniment petite dont une quantité variable augmente ou diminue continuellement, en est appelée la *Différence*. Soit par exemple une ligne courbe quelconque AMB , qui ait pour axe ou diamètre la ligne AC , & pour une de ses appliquées la droite PM ; & soit une autre appliquée pm infiniment proche de la première. Cela posé, si l'on mène MR parallèle à AC ; les cordes AM , Am ; & qu'on décrive du centre A , de l'intervalle AM le petit arc de cercle MS ; Pp fera la différence de AP , Rm celle de PM , Sm celle de AM , & Mm celle de l'arc AM . De même le petit triangle MAm qui a pour base l'arc Mm , sera la différence du segment AM ; & le petit espace $Mppm$, celle de l'espace compris par les droites AP , PM , & par l'arc AM .

COROLLAIRE.

1. IL est évident que la différence d'une quantité constante est nulle ou zero: ou (ce qui est la même chose) que les quantités constantes n'ont point de différence.

AVERTISSEMENT.

On se servira dans la suite de la note ou caractéristique d pour marquer la différence d'une quantité variable que l'on exprime par une seule lettre; & pour éviter la confusion, cette note d n'aura point d'autre usage dans la suite de ce calcul. Si l'on nomme par exemple les variables AP , x ; PM , y ; AM , z ; l'arc AM , u ; l'espace mixtiligne APM , s ; & le segment AM , t : dx exprimera la valeur de Pp , dy celle de Rm , dz celle de Sm , du celle du petit arc Mm , ds celle du petit espace $Mppm$, & dt celle du petit triangle mixtiligne MAm .

I. DEMANDE OU SUPPOSITION.

2. ON demande qu'on puisse prendre indifféremment l'une pour l'autre deux quantités qui ne diffèrent entr'elles que d'une quantité infiniment petite: ou (ce qui est la même

chose) qu'une quantité qui n'est augmentée ou diminuée que d'une autre quantité infiniment moindre qu'elle, puisse être considérée comme demeurant la même. On demande par exemple qu'on puisse prendre Ap pour AP , pm pour PM , l'espace Apm pour l'espace APM , le petit espace $Mppm$ pour le petit rectangle $MppP$, le petit secteur AMm pour le petit triangle AMS , l'angle pAm pour l'angle PAM , &c.

II. DEMANDE OU SUPPOSITION.

3. ON demande qu'une ligne courbe puisse être considérée comme l'assemblage d'une infinité de lignes droites, chacune infiniment petite: ou (ce qui est la même chose) comme un polygone d'un nombre infini de côtés, chacun infiniment petit, lesquels déterminent par les angles qu'ils font entr'eux, la courbure de la ligne. On demande par exemple que la portion de courbe Mm & l'arc de cercle MS puissent être considérés comme des lignes droites à cause de leur infinie petitesse, en sorte que le petit triangle mSM puisse être censé rectiligne.

AVERTISSEMENT.

On suppose ordinairement dans la suite que les dernières lettres de l'alphabet, z, y, x , &c. marquent des quantités variables; & au contraire que les premières a, b, c , &c. marquent des quantités constantes: de sorte que x devenant $x + dx$; y, z , &c. deviennent $y + dy$, $z + dz$, &c. *Et a, b, c , &c. demeurent * Art. I. les mesures a, b, c , &c.

PROPOSITION I.

Problème.

4. PRENDRE la différence de plusieurs quantités ajoutées ensemble, ou soustraites les unes des autres.

Soit $a + x + y - z$ dont il faut prendre la différence. Si l'on suppose que x soit augmentée d'une portion infiniment petite; c'est-à-dire qu'elle devienne $x + dx$; y de-

viendra alors $y + dy$; & $z, z + dz$; pour la constante a , elle demeurera la même a : de sorte que la quantité proposée $a + x + y - z$ deviendra $a + x + dx + y + dy - z - dz$; & sa différence, que l'on trouvera en la retranchant de cette dernière, sera $dx + dy - dz$. Il en est ainsi des autres; ce qui donne cette règle.

RÈGLE I.

Pour les quantités ajoutées, ou soustraites.

On prendra la différence de chaque terme de la quantité proposée, & retenant les mêmes signes, on en composera une autre quantité qui sera la différence cherchée.

PROPOSITION II.

Problème.

5. **P**RENDRE la différence d'un produit fait de plusieurs quantités multipliées les unes par les autres.

1°. La différence de xy est $y dx + x dy$. Car y devient $y + dy$ lors que x devient $x + dx$, & partant xy devient alors $xy + y dx + x dy + dx dy$ qui est le produit de $x + dx$ par $y + dy$, & sa différence sera $y dx + x dy + dx dy$, c'est-à-dire $y dx + x dy$: puisque $dx dy$ est une quantité infiniment petite par rapport aux autres termes $y dx$, & $x dy$; car si l'on divise par exemple $y dx$ & $x dy$ par dx , on trouve d'une part y , & de l'autre dy qui en est la différence, & par conséquent infiniment moindre qu'elle. D'où il suit que la différence du produit de deux quantités est égale au produit de la différence de la première de ces quantités par la seconde, plus au produit de la différence de la seconde par la première.

2°. La différence de xyz est $y z dx + x z dy + xy dz$. Car en considérant le produit xy comme une seule quantité, il faudra, comme l'on vient de prouver, prendre le produit de sa différence $y dx + x dy$ par la seconde z (ce qui donne $y z dx + x z dy$) plus le produit de la différence dz

de la seconde z par la première xy (ce qui donne $xy dz$); & partant la différence de xyz sera $y z dx + x z dy + xy dz$.

3°. La différence de xyz^u est $uyz dx + uxz dy + uxyz dz + xy z du$. Ce qui se prouve comme dans le cas précédent en regardant le produit xyz comme une seule quantité. Il en est ainsi des autres à l'infini, d'où l'on forme cette règle.

RÈGLE II.

Pour les quantités multipliées.

La différence du produit de plusieurs quantités multipliées les unes par les autres, est égale à la somme des produits de la différence de chacune de ces quantités par le produit des autres.

Ainsi la différence de ax est $xo + adx$, c'est-à-dire adx . Celle de $a + x \times b - y$ est $b dx - y dx - a dy - x dy$.

PROPOSITION III.

Problème.

6. **P**RENDRE la différence d'une fraction quelconque.

La différence de $\frac{x}{y}$ est $\frac{y dx - x dy}{yy}$. Car supposant $\frac{x}{y} = z$, on aura $x = yz$, & comme ces deux quantitez variables x & yz doivent toujours être égales entr'elles, soit qu'elles augmentent ou diminuent, il s'ensuit que leur différence, c'est-à-dire leurs accroissemens ou diminutions seront aussi égales entr'elles; & partant on aura $dx = y dz + z dy$, & $dz = \frac{dx - z dy}{y} = \frac{y dx - x dy}{yy}$ en mettant pour z sa valeur $\frac{x}{y}$. Ce qu'il falloit, &c. d'où l'on forme cette règle.

RÈGLE III.

Pour les quantités divisées, ou pour les fractions.

La différence d'une fraction quelconque est égale au

produit de la différence du numérateur par le dénominateur, moins le produit de la différence du dénominateur par le numérateur : le tout divisé par le carré du dénominateur.

Ainsi la différence de $\frac{a}{x}$ sera $-\frac{adx}{x^2}$, celle de $\frac{x}{a+x}$ sera $\frac{adx}{a^2+2ax+xx}$.

PROPOSITION IV.

Problème.

7. **P**RENDRE la différence d'une puissance quelconque parfaite ou imparfaite d'une quantité variable.

Il est nécessaire afin de donner une règle générale qui serve pour les puissances parfaites & imparfaites, d'expliquer l'analogie qui se rencontre entre leurs exposans.

Si l'on propose une progression géométrique dont le premier terme soit l'unité, & le second une quantité quelconque x , & qu'on dispose par ordre sous chaque terme son exposant, il est clair que ces exposans formeront une progression arithmétique.

Prog. geom. 1, x , xx , x^3 , x^4 , x^5 , x^6 , x^7 , &c.

Prog. arith. 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, &c.

Et si l'on continue la progression géométrique au dessous de l'unité, & l'arithmétique au dessous de zero, les termes de celle-cy seront les exposans de ceux auxquels ils répondent dans l'autre. Ainsi -1 est l'exposant de $\frac{1}{x}$, -2 celui de $\frac{1}{xx}$, &c.

Prog. geom. x , $\frac{1}{x}$, $\frac{1}{xx}$, $\frac{1}{x^3}$, $\frac{1}{x^4}$, &c.

Prog. arith. 1, 0, -1 , -2 , -3 , -4 , &c.

Mais si l'on introduit quelque nouveau terme dans la progression géométrique, il faudra pour avoir son exposant, en introduire un semblable dans l'arithmétique.

Ainsi \sqrt{x} aura pour exposant $\frac{1}{2}$: $\sqrt[3]{x}$, $\frac{1}{3}$: $\sqrt{x^4}$, $\frac{4}{3}$: $\frac{1}{\sqrt{x^5}}$, $-\frac{5}{2}$: $\frac{1}{\sqrt{x^3}}$, $-\frac{3}{2}$: $\frac{1}{\sqrt{x^2}}$, $-\frac{7}{2}$: &c. de sorte que ces expres-

sions \sqrt{x} & $x^{\frac{1}{2}}$, $\sqrt[3]{x}$ & $x^{\frac{1}{3}}$, $\sqrt{x^4}$ & $x^{\frac{4}{3}}$, $\frac{1}{\sqrt{x^5}}$ & $x^{-\frac{5}{2}}$, &c. ne signifient que la même chose.

Prog. geom. 1, \sqrt{x} , x , 1, \sqrt{x} , \sqrt{xx} , x , 1, \sqrt{x} , \sqrt{xx} , $\sqrt{x^3}$, $\sqrt{x^4}$, x .

Prog. arith. 0, $\frac{1}{2}$, 1, 0, $\frac{2}{3}$, $\frac{2}{3}$, 1, 0, $\frac{1}{3}$, $\frac{2}{3}$, $\frac{2}{3}$, $\frac{4}{3}$, 1.

Prog. geom. $\frac{1}{x}$, $\frac{1}{\sqrt{x^3}}$, $\frac{1}{xx}$, $\frac{1}{x^2}$, $\frac{1}{\sqrt{x^4}}$, $\frac{1}{\sqrt{x^3}}$, $\frac{1}{xx}$, $\frac{1}{x^2}$, $\frac{1}{\sqrt{x^4}}$, $\frac{1}{x^4}$.

Prog. arith. -1 , $-\frac{2}{2}$, -2 , -1 , $-\frac{4}{3}$, $-\frac{5}{3}$, -2 , -3 , $-\frac{7}{2}$, -4 .

Où l'on voit que de même que \sqrt{x} est moyenne géométrique entre 1 & x , de même aussi $\frac{1}{2}$ est moyenne arithmétique entre leurs exposans zero & 1 : & de même que $\sqrt[3]{x}$ est la première des deux moyennes géométriquement proportionnelles entre 1 & x , de même aussi $\frac{1}{3}$ est la première des deux moyennes arithmétiquement proportionnelles entre leurs exposans zero & 1 : & il en est ainsi des autres. Or il suit de la nature de ces deux progressions.

1^o. Que la somme des exposans de deux termes quelconques de la progression géométrique sera l'exposant du terme qui en est le produit. Ainsi $x^4 \times x^3$ où x^7 est le produit de x^4 par x^3 , & $x^{\frac{1}{2} + \frac{1}{3}}$ où $x^{\frac{5}{6}}$ est le produit de $x^{\frac{1}{2}}$ par $x^{\frac{1}{3}}$, & $x^{-\frac{1}{2} + \frac{1}{3}}$ où $x^{-\frac{1}{6}}$ est le produit de $x^{-\frac{1}{2}}$ par $x^{\frac{1}{3}}$, &c. De même $x^{\frac{1}{2} + \frac{1}{2}}$ où x^1 est le produit de $x^{\frac{1}{2}}$ par luy même, c'est-à-dire son carré, & $x^{-2 + -1 + 1}$ où x^{-2} est le produit de x^{-2} par x^{-1} par x^1 , c'est-à-dire son cube, & $x^{-\frac{1}{2} - \frac{1}{2} - \frac{1}{2} - \frac{1}{2}}$ ou x^{-2} est la quatrième puissance de $x^{-\frac{1}{2}}$, & il en est ainsi des autres puissances. D'où il est évident que le double, le triple, &c. de l'exposant d'un terme quelconque de la progression géométrique est l'exposant du carré, du cube, &c. de ce terme ; & partant que la moitié, le tiers, &c. de l'exposant d'un terme quelconque de la progression géométrique sera l'exposant de la racine quarrée, cubique, &c. de ce terme.

2^o. Que la différence des exposans de deux termes quelconques de la progression géométrique sera l'exposant du

quotient de la division de ces termes. Ainsi $x^{\frac{1}{2}} - \frac{1}{2}$
 $= x^{\frac{1}{2}}$ sera l'exposant du quotient de la division de
 $x^{\frac{1}{2}}$ par $x^{\frac{1}{2}}$, & $x^{-\frac{1}{2}} - \frac{1}{2} = x^{-\frac{3}{2}}$ sera l'exposant du
 quotient de la division de $x^{-\frac{1}{2}}$ par $x^{\frac{1}{2}}$; où l'on voit que
 c'est la même chose de multiplier $x^{-\frac{1}{2}}$ par $x^{-\frac{1}{2}}$ que de
 diviser $x^{-\frac{1}{2}}$ par $x^{\frac{1}{2}}$. Il en est ainsi des autres. Ceci bien
 entendu, il peut arriver deux différens cas.

Premier cas lorsque la puissance est parfaite, c'est-à-dire
 lorsque son exposant est un nombre entier. La différen-
 ce de x^2 est $2x dx$, de x^3 est $3x^2 dx$, de x^4 est $4x^3 dx$,
 &c. Car le carré de x n'étant autre chose que le produit
 de x par x , sa différence* sera $x dx + x dx$, c'est-à-dire
 $2x dx$. De même le cube de x n'étant autre chose que le
 produit de x par x par x , sa différence* sera $xx dx + xx dx$
 $+ x x dx$, c'est-à-dire $3x^2 dx$; & comme il en est ainsi
 des autres puissances à l'infini, il s'ensuit que si l'on suppo-
 se que m marque un nombre entier tel que l'on voudra,
 la différence de x^m sera $m x^{m-1} dx$.

Si l'exposant est négatif, on trouvera que la différen-
 ce de x^{-m} ou de $\frac{1}{x^m}$ sera $-\frac{m x^{m-1} dx}{x^{2m}} = -m x^{-m-1} dx$.

Second cas, lorsque la puissance est imparfaite, c'est-à-
 dire lorsque son exposant est un nombre rompu. Soit pro-
 posé de prendre la différence de $\sqrt[n]{x^m}$ ou $x^{\frac{m}{n}}$ ($\frac{m}{n}$ exprime un
 nombre rompu quelconque) on supposera $x^{\frac{m}{n}} = z$, & en
 élevant chaque membre à la puissance n on aura $x^m = z^n$,
 & en prenant les différences comme l'on vient d'expliquer
 dans le premier cas, on trouvera $m x^{m-1} dx = n z^{n-1} dz$
 & $dz = \frac{m x^{m-1} dx}{n z^{n-1}} = \frac{m}{n} x^{\frac{m}{n}-1} dx$, ou $\frac{m}{n} dx \sqrt[n]{x^{m-n}}$, en
 mettant à la place de $n z^{n-1}$ sa valeur $n x^{m-\frac{m}{n}}$. Si
 l'exposant est négatif, on trouvera que la différence de
 $x^{-\frac{m}{n}}$ ou de $\frac{1}{x^{\frac{m}{n}}}$ sera $-\frac{m}{n} x^{\frac{m}{n}-1} dx = -\frac{m}{n} x^{-\frac{m}{n}-1} dx$.

Ce

REGLE IV.

Pour les puissances parfaites ou imparfaites.

La différence d'une puissance quelconque parfaite ou
 imparfaite d'une quantité variable, est égale au produit
 de l'exposant de cette puissance, par cette même quanti-
 té élevée à une puissance moindre d'une unité, & multi-
 pliée par sa différence.

Ainsi si l'on suppose que m exprime tel nombre entier
 ou rompu que l'on voudra, soit positif, soit négatif, & x
 une quantité variable quelconque, la différence de x^m sera
 toujours $m x^{m-1} dx$.

EXEMPLES.

La différence du cube de $ay - xx$, c'est-à-dire de
 $ay - xx^3$, est $3x ay - xx^2 \times a dy - 2x dx = 3a^2 y dy$
 $- 6aaxxy dy + 3ax^2 dy - 6aayyx dx + 12ayx^2 dx$
 $- 6x^3 dx$.

La différence de $\sqrt{xy + yy}$ ou de $xy + yy^{\frac{1}{2}}$, est
 $\frac{1}{2} \times xy + yy^{-\frac{1}{2}} \times y dx + x dy + 2y dy$, ou $\frac{y dx + x dy + 2y dy}{2\sqrt{xy + yy}}$.

Celle de $\sqrt{a^2 + axyy}$ ou de $a^2 + axyy^{\frac{1}{2}}$, est $\frac{1}{2} \times a^2 + axyy^{-\frac{1}{2}}$
 $\times ayy dx + 2axy dy$, ou $\frac{ayy dx + 2axy dy}{2\sqrt{a^2 + axyy}}$. Celle de $\sqrt{ax + xx}$,

ou de $ax + xx^{\frac{1}{2}}$, est $\frac{1}{2} \times ax + xx^{-\frac{1}{2}} \times a dx + 2x dx$, ou
 $\frac{a dx + 2x dx}{2\sqrt{ax + xx^{\frac{1}{2}}}}$.

La différence de $\sqrt{ax + xx} + \sqrt{a^2 + axyy}$ ou de
 $ax + xx + \sqrt{a^2 + axyy}^{\frac{1}{2}}$, est $\frac{1}{2} \times ax + xx + \sqrt{a^2 + axyy}$
 $\times a dx + 2x dx + \frac{ayy dx + 2axy dy}{2\sqrt{a^2 + axyy}}$, ou $\frac{a dx + 2x dx}{2\sqrt{ax + xx} + \sqrt{a^2 + axyy}}$
 $+ \frac{ayy dx + 2axy dy}{2\sqrt{a^2 + axyy} \times 2\sqrt{ax + xx} + \sqrt{a^2 + axyy}}$.

B

Art. 6.

La différence de $\frac{\sqrt{ax+xx}}{\sqrt{xy+yy}}$ sera selon cette regle* & celle

des fractions
$$\frac{\frac{adx+xxdx}{\sqrt{ax+xx}} \times \sqrt{xy+yy} - yd\sqrt{ax+xx} - \sqrt{ax+xx} \times ydy}{xy+yy}$$

REMARQUE.

Art. 5.

8. IL est à propos de bien remarquer que l'on a toujours supposé en prenant les différences, qu'une des variables x croissant, les autres y, z , &c. croissoient aussi; c'est-à-dire que les x devenant $x + dx$, les y, z , &c. devenoient $y + dy, z + dz$, &c. C'est-pourquoy s'il arrive que quelques-unes diminüent pendant que les autres croissent, il en faudra regarder les différences comme des quantités négatives par rapport à celles des autres qu'on suppose croître, & changer par-conséquent les signes des termes où les différences de celles qui diminüent se rencontrent. Ainsi si l'on suppose que les x croissant, les y & les z diminüent, c'est-à-dire que les x devenant $x + dx$, les y & les z deviennent $y - dy$ & $z - dz$, & que l'on veuille prendre la différence du produit xyz ; il faudra changer dans la différence $xydz + xzdy + yzdx$ trouvée*, les signes des termes où dy & dz se rencontrent: ce qui donne $yzdx - xydz - xzdy$ pour la différence cherchée.



SECTION IX.

Solution de quelques Problèmes qui dépendent des Méthodes précédentes.

PROPOSITION I.

Problème.

163. SOIT une ligne courbe AMD ($AP = x$, $PM = y$, FIG. 159. $AB = a$) telle que la valeur de l'appliquée y soit exprimée par une fraction, dont le numérateur & le dénominateur deviennent chacun zero lorsque $x = a$, c'est-à-dire lorsque le point P tombe sur le point donné B . On demande quelle doit être alors la valeur de l'appliquée BD .

Soient entendues deux lignes courbes ANB , COB , qui aient pour axe commun la ligne AB , & qui soient telles que l'appliquée PN exprime le numérateur, & l'appliquée PO le dénominateur de la fraction générale qui convient à toutes les PM : de sorte que $PM = \frac{AB \times PN}{PO}$. Il est clair que ces deux courbes se rencontreront au point B ; puisque par la supposition PN & PO deviennent chacune zero lorsque le point P tombe en B . Cela posé, si l'on imagine une appliquée bd infiniment proche de BD , & qui rencontre les lignes courbes ANB , COB aux points f, g ; l'on aura $bd = \frac{AB \times bf}{bg}$, laquelle * ne diffère pas de BD . * Art. 2.

Il n'est donc question que de trouver le rapport de bg à bf . Or il est visible que la coupée AP devenant AB , les appliquées PN , PO deviennent nulles; & que AP devenant Ab , elles deviennent bf , bg . D'où il suit que ces appliquées, elles-mêmes bf , bg , sont la différence des appliquées en B & b par rapport aux courbes ANB , COB ; & partant que si l'on prend la différence du numérateur, & qu'on la divise par la différence du dénominateur, après

avoir fait $x = a = Ab$ ou AB , l'on aura la valeur cherchée de l'appliquée bd ou BD . Ce qu'il falloit trouver.

EXEMPLE I.

164. SOIT $y = \frac{\sqrt{2x^3 - x^4} - a\sqrt{axx}}{a - \sqrt{axx}}$. Il est clair que lorsque $x = a$, le numérateur & le dénominateur de la fraction deviennent égaux chacun à zero. C'est-pourquoy l'on prendra la différence $\frac{a^3 dx - 2x^3 dx}{\sqrt{2x^3 - x^4}} - \frac{ax dx}{\sqrt{axx}}$ du numérateur, & on la divisera par la différence $-\frac{3ax dx}{4\sqrt{axx}}$ du dénominateur, après avoir fait $x = a$, c'est-à-dire qu'on divisera $-\frac{4}{3} ax dx$ par $-\frac{3}{4} dx$; ce qui donne $\frac{16}{9} a$ pour la valeur cherchée de BD .

EXEMPLE II.

165. SOIT $y = \frac{ax - ax}{a - \sqrt{ax}}$. On trouve $y = 2a$, lorsque $x = a$.

On pourroit résoudre cet exemple sans avoir besoin du calcul des différences, en cette sorte.

Ayant ôté les incommensurables, on aura $auxx + 2aaxy - axyy - 2a^3x + a^4 + ayy - 2a^3y = 0$, qui étant divisé par $x - a$, se réduit à $aux - a^3 + 2aay - ayy = 0$; & substituant a pour x , il vient comme auparavant $y = 2a$.

[. . .]

