



# ANALYSE

DES

## INFINIMENT PETITS.

---

PREMIERE PARTIE.

---

### DU CALCUL DES DIFFERENCES.

---

SECTION PREMIERE.

Où l'on donne les règles de ce calcul.

DÉFINITION I.

On appelle quantités *variables* celles qui augmentent ou diminuent continuellement; & au contraire quantités *constantes* celles qui demeurent les mêmes pendant que les autres changent. Ainsi dans une parabole les appliquées & les coupées sont des quantités variables, au lieu que le paramètre est une quantité constante.



## DÉFINITION II.

La portion infiniment petite dont une quantité variable augmente ou diminue continuellement, en est appelée la *Différence*. Soit par exemple une ligne courbe quelconque  $AMB$ , qui ait pour axe ou diamètre la ligne  $AC$ , & pour une de ses appliquées la droite  $PM$ ; & soit une autre appliquée  $p m$  infiniment proche de la première. Cela posé, si l'on mène  $MR$  parallèle à  $AC$ ; les cordes  $AM$ ,  $Am$ ; & qu'on décrive du centre  $A$ , de l'intervalle  $AM$  le petit arc de cercle  $MS$ ;  $Pp$  fera la différence de  $AP$ ,  $Rm$  celle de  $Pm$ ,  $S m$  celle de  $AM$ , &  $Mm$  celle de l'arc  $AM$ . De même le petit triangle  $MAm$  qui a pour base l'arc  $Mm$ , fera la différence du segment  $AM$ ; & le petit espace  $Mppm$ , celle de l'espace compris par les droites  $AP$ ,  $Pm$ , & par l'arc  $AM$ .

## COROLLAIRE.

1. Il est évident que la différence d'une quantité constante est nulle ou zero; ou (ce qui est la même chose) que les quantités constantes n'ont point de différence.

## AVERTISSEMENT.

On se servira dans la suite de la note ou caractéristique  $d$  pour marquer la différence d'une quantité variable que l'on exprime par une seule lettre; & pour éviter la confusion, cette note  $d$  n'aura point d'autre usage que la suite de ce calcul. Si l'on nomme par exemple les variables  $AP$ ,  $x$ ;  $PM$ ,  $y$ ;  $AM$ ,  $z$ ; l'arc  $AM$ ,  $u$ ; l'espace mixtiligne  $APM$ ,  $s$ ; & le segment  $AM$ ,  $t$ ;  $dx$  exprimera la valeur de  $P$ ,  $dy$  celle de  $R$ ,  $m$ ,  $dz$  celle de  $S$ ,  $m$ , du celle du petit arc  $Mm$ ,  $ds$  celle du petit espace  $Mppm$ , &  $dt$  celle du petit triangle mixtiligne  $MAm$ .

## I. DEMANDE OU SUPPOSITION.

2. On demande qu'on puisse prendre indifféremment l'une pour l'autre deux quantités qui ne diffèrent entr'elles que d'une quantité infiniment petite; ou (ce qui est la même

## DES INFINIMENT PETITS. I. PART.

chose) qu'une quantité qui n'est augmentée ou diminuée que d'une autre quantité infiniment moindre qu'elle, puisse être considérée comme demeurant la même. On demande par exemple qu'on puisse prendre  $AP$  pour  $AP$ ,  $Pm$  pour  $Pm$ , l'espace  $APm$  pour l'espace  $APM$ , le petit espace  $Mppm$  pour le petit rectangle  $MppR$ , le petit secteur  $AMm$  pour le petit triangle  $AMS$ , l'angle  $PAm$  pour l'angle  $PAM$ , &c.

## II. DEMANDE OU SUPPOSITION.

3. On demande qu'une ligne courbe puisse être considérée comme l'assemblage d'une infinité de lignes droites, chacune infiniment petite; ou (ce qui est la même chose) comme un polygone d'un nombre infini de côtés, chacun infiniment petit, lesquels déterminent par les angles qu'ils font entr'eux, la courbure de la ligne. On demande par exemple que la portion de courbe  $Mm$  & l'arc de cercle  $MS$  puissent être considérés comme des lignes droites à cause de leur infinité petite, en sorte que le petit triangle  $mSM$  puisse être censé rectiligne.

## AVERTISSEMENT.

On suppose ordinairement dans la suite que les dernières lettres de l'alphabet,  $z, y, x$ , &c. marquent des quantités variables; & au contraire que les premières  $a, b, c$ , &c. marquent des quantités constantes: de sorte que  $x$  devenant  $x + dx$ ;  $y$ ,  $z$ , &c. deviennent  $y + dy$ ,  $z + dz$ , &c. \* Et  $a, b, c$ , &c. demeurent \* Art. I. les signes  $a, b, c$ , &c.

## PROPOSITION I.

## Problème.

4. RENDRE la différence de plusieurs quantités ajoutées ensemble, ou soustraites les unes des autres.

Soit  $a + x + y + z$  dont il faut prendre la différence. Si l'on suppose que  $x$  soit augmentée d'une portion infiniment petite; c'est-à-dire qu'elle devienne  $x + dx$ ;  $y$  de-

4 viendra alors  $y+dy$ ; &  $\zeta, \zeta+d\zeta$ ; pour la constante  $a$ , elle demeurera la même  $a$ : de sorte que la quantité proposée  $a+x+y-\zeta$  deviendra  $a+x+dx+y+dy-\zeta+d\zeta$ ; & sa différence, que l'on trouvera en la retranchant de cette dernière, sera  $dx+dy-d\zeta$ . Il en est ainsi des autres; ce qui donne cette règle.

## R E G L E I.

*Pour les quantités ajoutées, ou soustraites.*

On prendra la différence de chaque terme de la quantité proposée, & retenant les mêmes signes, on en composera une autre quantité qui sera la différence cherchée.

## P R O P O S I T I O N II.

Problème.

5. P R E N D R E la différence d'un produit fait de plusieurs quantités multipliées les unes par les autres.

1<sup>o</sup>. La différence de  $xy$  est  $ydx+xdy$ . Car  $y$  devient  $y+dy$  lois que  $x$  devient  $x+dx$ , & partant  $xy$  devient alors  $xy+ydx+xdy+dx dy$  qui est le produit de  $x+dx$  par  $y+dy$ , & sa différence sera  $ydx+xdy+dx dy$ , c'est-à-dire  $ydx+xdy$ : puisque  $dx dy$  est une quantité infiniment petite par rapport aux autres termes  $ydx$ , &  $xdy$ ; car si l'on divise par exemple  $ydx$  &  $dx dy$  par  $dx$ , on trouve d'une part  $y$ , & de l'autre  $dy$  qui en est la différence, & par conséquent infiniment moindre qu'elle. D'où il suit que la différence du produit de deux quantités est égale au produit de la différence de la première est égale au produit de la seconde, plus au produit de la différence de la seconde par la première.

2<sup>o</sup>. La différence de  $xy\zeta$  est  $y\zeta dx+x\zeta dy+xy d\zeta$ . Car en considérant le produit  $xy$  comme une seule quantité, il faudra, comme l'on vient de prouver, prendre le produit de sa différence  $ydx+xdy$  par la seconde  $\zeta$  (ce qui donne  $y\zeta dx+x\zeta dy$ ) plus le produit de la différence  $d\zeta$

## DES INFINIMENT PETITS. I. PART.

5 de la seconde  $\zeta$  par la première  $xy$  (ce qui donne  $xy d\zeta$ ); & partant la différence de  $xyz$  sera  $y\zeta dx+x\zeta dy+xy d\zeta$ .

3<sup>o</sup>. La différence de  $xy\zeta u$  est  $xyz dx+ux\zeta dy+uxy d\zeta+xy\zeta du$ . Ce qui se prouve comme dans le cas précédent en regardant le produit  $xy\zeta$  comme une seule quantité. Il en est ainsi des autres à l'infini, d'où l'on forme cette règle.

## R E G L E II.

*Pour les quantités multipliées.*

La différence du produit de plusieurs quantités multipliées les unes par les autres, est égale à la somme des produits de la différence de chacune de ces quantités par le produit des autres.

Ainsi la différence de  $ax$  est  $xo+adx$ , c'est-à-dire  $adx$ . Celle de  $a+x \times b-y$  est  $b dx - y dx - a dy - x dy$ .

## P R O P O S I T I O N III.

Problème.

6. P R E N D R E la différence d'une fraction quelconque.

La différence de  $\frac{x}{y}$  est  $\frac{y dx - x dy}{yy}$ . Car supposant  $\frac{x}{y} = \zeta$ , on aura  $x = y\zeta$ , & comme ces deux quantitez variables  $x$  &  $y\zeta$  doivent toujours être égales entr'elles, soit qu'elles augmentent ou diminuent, il s'ensuit que leur différence, c'est-à-dire leurs accroissemens ou diminutions seront aussi égales entr'elles; & partant on aura  $dx = y d\zeta + d\zeta y$ , &  $d\zeta = \frac{dx - x dy}{y}$  en mettant pour  $\zeta$  sa valeur  $\frac{x}{y}$ . Ce qu'il falloir, &c. d'où l'on forme cette règle.

## R E G L E III.

*Pour les quantités divisées, ou pour les fractions.*

La différence d'une fraction quelconque est égale au

produit de la différence du numérateur par le dénominateur, moins le produit de la différence du dénominateur par le numérateur : le tout divisé par le quarté du dénominateur.

Ainsi la différence de  $\frac{a}{x}$  fera  $-\frac{adx}{x^2}$ , celle de  $\frac{a}{a+x}$  fera

$$\frac{adx}{a^2+2ax+xx}$$

PROPOSITION IV.

Problème.

7. **P R E N D R E** la différence d'une puissance quelconque par faite ou imparfaite d'une quantité variable.

Il est nécessaire afin de donner une règle générale qui soive pour les puissances parfaites & imparfaites, d'expliquer l'analogie qui se rencontre entre leurs exposans.

Si l'on propose une progression géométrique dont le premier terme soit l'unité, & le second une quantité quelconque x, & qu'on dispose par ordre sous chaque terme son exposant, il est clair que ces exposans formeront une progression arithmétique.

Prog. geom. 1, x, xx, x³, x⁴, x⁵, x⁶, x⁷, &c.

Prog. arith. 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, &c.

Et si l'on continue la progression géométrique au dessous de l'unité, & l'arithmétique au dessous de zero, les termes de celle-cy seront les exposans de ceux auxquels ils répondent dans l'autre. Ainsi — 1 est l'exposant de

$\frac{1}{x}$ , — 2 celui de  $\frac{1}{x^2}$ , &c.

Prog. geom. x,  $\frac{1}{x}$ ,  $\frac{1}{x^2}$ ,  $\frac{1}{x^3}$ ,  $\frac{1}{x^4}$ , &c.

Prog. arith. 1, 0, — 1, — 2, — 3, — 4, &c.

Mais si l'on introduit quelque nouveau terme dans la progression géométrique, il faudra pour avoir son exposant, en introduire un semblable dans l'arithmétique.

Ainsi  $\sqrt{x}$  aura pour exposant  $\frac{1}{2}$ :  $\sqrt[3]{x}$ ,  $\frac{1}{3}$ :  $\sqrt[4]{x}$ ,  $\frac{1}{4}$ :  $\sqrt[5]{x}$ ,  $\frac{1}{5}$ :

$\sqrt[3]{x^2}$ ,  $\frac{2}{3}$ :  $\sqrt[4]{x^3}$ ,  $\frac{3}{4}$ : &c. de sorte que ces expref-

sions  $\sqrt{x}$  &  $x^{\frac{1}{2}}$ ,  $\sqrt[3]{x}$  &  $x^{\frac{1}{3}}$ ,  $\sqrt[4]{x}$  &  $x^{\frac{1}{4}}$ ,  $\sqrt[5]{x}$  &  $x^{\frac{1}{5}}$ , &c. ne signifient que la même chose.

Prog. geom. 1,  $\sqrt{x}$ , x, 1,  $\sqrt[3]{x}$ ,  $\sqrt[3]{xx}$ , x, 1,  $\sqrt[4]{x}$ ,  $\sqrt[4]{xx}$ ,  $\sqrt[4]{x^3}$ ,  $\sqrt[4]{x^4}$ , x.

Prog. arith. 0,  $\frac{1}{2}$ , 1, 0,  $\frac{1}{3}$ ,  $\frac{2}{3}$ , 1, 0,  $\frac{1}{4}$ ,  $\frac{2}{4}$ ,  $\frac{3}{4}$ , 1.

Prog. geom.  $\frac{1}{x}$ ,  $\frac{1}{\sqrt{x}}$ ,  $\frac{1}{xx}$ ,  $\frac{1}{x^{\frac{3}{2}}}$ ,  $\frac{1}{\sqrt[3]{x^3}}$ ,  $\frac{1}{xx}$ ,  $\frac{1}{x^{\frac{5}{4}}}$ ,  $\frac{1}{\sqrt[4]{x^4}}$ ,  $\frac{1}{x^2}$ .

Prog. arith. — 1, —  $\frac{2}{2}$ , — 2, — 1, —  $\frac{3}{4}$ , —  $\frac{4}{4}$ , — 2, — 3, —  $\frac{7}{2}$ , — 4.

Où l'on voit que de même que  $\sqrt{x}$  est moyenne géométrique entre 1 & x, de même aussi  $\frac{1}{2}$  est moyenne arithmétique entre leurs exposans zero & 1 : & de même que  $\sqrt[3]{x}$  est la première des deux moyennes géométriquement proportionnelles entre 1 & x, de même aussi  $\frac{1}{3}$  est la première des deux moyennes arithmétiquement proportionnelles entre leurs exposans zero & 1 : & il en est ainsi des autres. Or il suit de la nature de ces deux progressions.

1<sup>o</sup>. Que la somme des exposans de deux termes quelconques de la progression géométrique fera l'exposant du terme qui en est le produit. Ainsi  $x^{+1}$  où  $x^7$  est le produit de  $x^1$  par  $x^4$ , &  $x^{\frac{1}{2} + \frac{1}{2}}$  où  $x^{\frac{1}{2}}$  est le produit de  $x^{\frac{1}{2}}$  par  $x^{\frac{1}{2}}$ , &  $x^{-\frac{1}{3} + \frac{1}{3}}$  où  $x^{-\frac{1}{3}}$  est le produit de  $x^{-\frac{1}{3}}$  par  $x^{\frac{1}{3}}$ , &c. De même  $x^{\frac{1}{2} + \frac{1}{2}}$  où  $x^{\frac{1}{2}}$  est le produit de  $x^{\frac{1}{2}}$  par lui-même, c'est-à-dire son quarté, &  $x^{+1 + +1}$  où  $x^6$  est le produit de  $x^2$  par  $x^4$ , c'est-à-dire son cube, &  $x^{-\frac{1}{3} - \frac{1}{3} - \frac{1}{3}}$  où  $x^{-\frac{1}{3}}$  est la quatrième puissance de  $x^{-\frac{1}{3}}$ , & il en est ainsi des autres puissances. D'où il est évident que le double, le triple, &c. de l'exposant d'un terme quelconque de la progression géométrique est l'exposant du quarté, du cube, &c. de ce terme; & partant que la moitié, le tiers, &c. de l'exposant d'un terme quelconque de la progression géométrique fera l'exposant de la racine quartée, cubique, &c. de ce terme.

2<sup>o</sup>. Que la différence des exposans de deux termes quelconques de la progression géométrique sera l'exposant du

Ce qui donne cette règle générale.

REGLE IV.

Pour les puissances parfaites ou imparfaites.

La différence d'une puissance quelconque parfaite ou imparfaite d'une quantité variable, est égale au produit de l'exposant de cette puissance, par cette même quantité élevée à une puissance moindre d'une unité, & multipliée par sa différence.

Ainsi si l'on suppose que  $m$  exprime tel nombre entier ou rompu que l'on voudra, soit positif, soit négatif, &  $x$  une quantité variable quelconque, la différence de  $x^m$  sera toujours  $m x^{m-1} dx$ .

EXEMPLES.

La différence du cube de  $ay - xx$ , c'est-à-dire de  $ay - xx$ , est  $3 \times ay - xx \times a dy - 2 \times dx = 3 a^2 y dy - 2 x dx$ .

La différence de  $\sqrt{xy + yy}$  ou de  $xy + yy$ , est  $\frac{1}{2} \times xy + yy \times y dx + x dy + 2 y dy$ , ou  $\frac{y dx + x dy + 2 y dy}{2 \sqrt{xy + yy}}$ .

Celle de  $\sqrt{a^2 + axy}$  ou de  $a^2 + axy$ , est  $\frac{1}{2} \times a^2 + axy \times a y dx + 2 a x y dy$ , ou  $\frac{a y dx + 2 a x y dy}{2 \sqrt{a^2 + axy}}$ . Celle de  $\sqrt{ax + xx}$ , ou de  $ax + xx$ , est  $\frac{1}{2} \times ax + xx \times a dx + 2 x dx$ , ou  $\frac{a dx + 2 x dx}{2 \sqrt{ax + xx}}$ .

La différence de  $\sqrt{ax + xx + axy}$  ou de  $ax + xx + axy$  ou de  $ax + xx + \sqrt{a^2 + axy}$ , est  $\frac{1}{2} \times ax + xx + axy \times a y dx + 2 a x y dy + \sqrt{a^2 + axy} \times a dx + 2 x dx + \frac{a y dx + 2 a x y dy}{2 \sqrt{a^2 + axy}}$ , ou  $\frac{a dx + 2 x dx + a y dx + 2 a x y dy}{2 \sqrt{ax + xx + axy}}$ .

La différence de  $\sqrt{ax + xx + \sqrt{a^2 + axy}}$  ou de  $ax + xx + \sqrt{a^2 + axy}$ , est  $\frac{1}{2} \times ax + xx + \sqrt{a^2 + axy} \times a dx + 2 x dx + \frac{a y dx + 2 a x y dy}{2 \sqrt{a^2 + axy}}$ , ou  $\frac{a dx + 2 x dx + a y dx + 2 a x y dy}{2 \sqrt{ax + xx + \sqrt{a^2 + axy}}}$ .

ANALYSE

quotient de la division de ces termes. Ainsi  $x^{\frac{1}{2}} - \frac{1}{2} x^{-\frac{1}{2}}$  sera l'exposant du quotient de la division de  $x^{\frac{1}{2}}$  par  $x^{\frac{1}{2}}$ , &  $x^{-\frac{1}{2}} - \frac{1}{2} x^{-\frac{3}{2}}$  sera l'exposant du quotient de la division de  $x^{-\frac{1}{2}}$  par  $x^{\frac{1}{2}}$ ; où l'on voit que c'est la même chose de multiplier  $x^{-\frac{1}{2}}$  par  $x^{-\frac{1}{2}}$  que de diviser  $x^{-\frac{1}{2}}$  par  $x^{\frac{1}{2}}$ . Il en est ainsi des autres. Ceci bien entendu, il peut arriver deux différens cas.

Premier cas lorsque la puissance est parfaite, c'est-à-dire lorsque son exposant est un nombre entier. La différence de  $xx$  est  $2 x dx$ , de  $x^3$  est  $3 x^2 dx$ , de  $x^4$  est  $4 x^3 dx$ , &c. Car le carré de  $x$  n'étant autre chose que le produit de  $x$  par  $x$ , sa différence sera  $x dx + x dx$ , c'est-à-dire  $2 x dx$ . De même le cube de  $x$  n'étant autre chose que le produit de  $x$  par  $x$  par  $x$ , sa différence sera  $xx dx + xx dx + x x dx$ , c'est-à-dire  $3 x^2 dx$ , & comme il en est ainsi des autres puissances à l'infini, il s'ensuit que si l'on suppose que  $m$  marque un nombre entier tel que l'on voudra, la différence de  $x^m$  sera  $m x^{m-1} dx$ .

Si l'exposant est négatif, on trouvera que la différence de  $x^{-m}$  ou de  $\frac{1}{x^m}$  sera  $-\frac{m x^{m-1} dx}{x^{2m}} = -m x^{-m-1} dx$ .

Second cas, lorsque la puissance est imparfaite, c'est-à-dire lorsque son exposant est un nombre rompu. Soit proposé de prendre la différence de  $\sqrt{x}$  ou  $x^{\frac{1}{2}}$  ( $\frac{1}{2}$  exprime un nombre rompu quelconque) on supposera  $x^{\frac{1}{2}} = \mathcal{L}$ , & en élevant chaque membre à la puissance  $n$  on aura  $x^{\frac{n}{2}} = \mathcal{L}^n$ , & en prenant les différences comme l'on vient d'expliquer dans le premier cas, on trouvera  $m x^{m-1} dx = n \mathcal{L}^{n-1} d\mathcal{L}$  &  $d\mathcal{L} = \frac{m x^{m-1} dx}{n \mathcal{L}^{n-1}} = \frac{m}{n} x^{\frac{m}{n}-1} dx$ , ou  $\frac{m}{n} \sqrt[n]{x^{\frac{m}{n}-1}}$ , en mettant à la place de  $n \mathcal{L}^{n-1}$  sa valeur  $n x^{\frac{n-1}{2}}$ . Si l'exposant est négatif, on trouvera que la différence de  $x^{-\frac{m}{n}}$  ou de  $\frac{1}{x^{\frac{m}{n}}}$  sera  $-\frac{m}{n} x^{-\frac{m}{n}-1} dx$ .

La différence de  $\frac{\sqrt{ax+xx}}{xy+yy}$  sera selon cette regle\* & celle des fractions  $\frac{\frac{ad+xxdx}{y^2ax+xx} \times \sqrt{xy+yy} - yd - ydy - ydy \times yax+xx}{xy+yy}$

REMARQUE.

8. Il est à propos de bien remarquer que l'on a toujours supposé en prenant les différences, qu'une des variables  $x$  croissant, les autres  $y, z$  &c. croissoient aussi; c'est-à-dire que les  $x$  devenant  $x + dx$ , les  $y, z$  &c. devenoient  $y + dy, z + dz$ , &c. C'est-pourquoy s'il arrive que quelques-unes diminuent pendant que les autres croissent, il en faudra regarder les différences comme des quantités négatives par rapport à celles des autres qu'on suppose croître, & changer par-conséquent les signes des termes où les différences de celles qui diminuent se rencontrent. Ainsi si l'on suppose que les  $x$  croissant, les  $y$  & les  $z$  diminuent, c'est-à-dire que les  $x$  devenant  $x + dx$ , les  $y$  & les  $z$  deviennent  $y - dy$  &  $z - dz$ , & que l'on veuille prendre la différence du produit  $xyz$ ; il faudra changer dans la différence  $xydz + xzdy + yzdx$  trouvée \*, les signes des termes où  $dy$  &  $dz$  se rencontrent: ce qui donne  $yzdx - xydz - xzdy$  pour la différence cherchée.



SECTION II.

Usage du calcul des différences pour trouver les Tangentes de toutes sortes de lignes courbes.

DÉFINITION.

SI l'on prolonge un des petits côtés  $Mm$  du polygone Fig. 2. qui compose \* une ligne courbe; ce petit côté ainsi \* Art. 5. prolongé sera appelé la Tangente de la courbe au point  $M$  ou  $m$ .

PROPOSITION I.

Problème.

9. Soit une ligne courbe  $AM$  telle que la relation de la courbe  $AP$  à l'appliquée  $PM$ , soit exprimée par une équation quelconque, & qu'il faille du point donné  $M$  sur cette courbe mener la tangente  $MT$ .

Ayant mené l'appliquée  $MP$ , & supposé que la droite  $MT$  qui rencontre le diamètre au point  $T$ , soit la tangente cherchée; on concevra une autre appliquée  $mp$  infiniment proche de la première, avec une petite droite  $MR$  parallèle à  $AP$ . Et en nommant les données  $AP, x; PM, y;$  (donc  $Pp$  ou  $MR = dx;$  &  $Rm = dy.$ ) Les triangles semblables  $mRM$  &  $MPT$  donneront  $mR(dx) :: MP(dy)$ .  $PT = \frac{ydx}{dy}$ . Or par le moyen de la différence de l'équation donnée, on trouvera une valeur de  $dx$  en termes qui seront trois affectés par  $dy$ , laquelle étant multipliée par  $y$  & divisée par  $dy$ , donnera une valeur de la soustragente  $PT$  en termes entièrement connus & dérivés des différences, laquelle servira à mener la tangente cherchée  $MT$ .

REMARQUE.

10. Lorsque le point  $T$  tombe du côté opposé au point  $A$  origine des  $x$ , il est clair que  $x$  croissant,  $y$  dimi-

Art. 3. nue, & qu'il faut changer par-consequent\* dans la différence de l'équation donnée les signes de tous les termes où  $dy$  se rencontre: autrement la valeur de  $dx$  en  $dy$  seroit négative; & partant aussi celle de  $PT$  ( $\frac{ydx}{dy}$ ). Il est mieux cependant, pour ne se point embarasser, de prendre toujours la différence de l'équation donnée par les regles que l'on a prescrites\* sans y rien changer; car s'il arrive à la fin de l'opération que la valeur de  $PT$  soit positive, il s'ensuivra qu'il faudra prendre le point  $T$  du même côté que le point  $A$  origine des  $x$ , comme l'on a supposé en faisant le calcul; & au contraire si elle est négative, il le faudra prendre du côté opposé. Ceci s'éclaircira par les exemples suivans.

E X E M P L E I.

11. 1°. Si l'on veut que  $ax = yy$  exprime la relation de  $AP$  à  $PM$ ; la courbe  $AM$  sera une parabole qui aura pour paramètre la droite donnée  $a$ , & l'on aura en prenant de part & d'autre les différences,  $adx = 2ydy$ , &  $dx = \frac{2ydy}{a}$  &  $PT$  ( $\frac{ydx}{dy}$ ) =  $\frac{2yy}{a} = 2x$  en mettant pour  $yy$  sa valeur  $ax$ . D'où il suit que si l'on prend  $PT$  double de  $AP$ , & qu'on mène la droite  $MT$ , elle sera tangente au point  $M$ . Ce qui étoit proposé.

2°. Soit l'équation  $aa = xy$  qui exprime la nature de l'hyperbole entre les asymptotes. On aura en prenant les différences  $xdy + ydx = 0$ , & partant  $PT$  ( $\frac{ydx}{dy}$ ) =  $-x$ . D'où il suit que si l'on prend  $PT = PA$  du côté opposé au point  $A$ , & qu'on mène la droite  $MT$ , elle sera la tangente en  $M$ .

3°. Soit l'équation générale  $y^m = x$  qui exprime la nature de toutes les paraboles à l'infini lorsque l'exposant  $m$  marque un nombre positif entier ou rompu, & de toutes les hyperboles lorsqu'il marque un nombre négatif. On aura en prenant les différences  $my^{m-1}dy = dx$ , & partant  $PT$  ( $\frac{ydx}{dy}$ ) =  $my^m = mx$  en mettant pour  $y^m$  sa valeur  $x$ .

FIG. 3.

FIG. 4.

Si  $m = \frac{2}{2}$ , l'équation sera  $y^2 = axx$  qui exprime la nature d'une des paraboles cubiques, & la soutangente  $PT = \frac{2}{2}x$ . Si  $m = -2$ , l'équation sera  $a^3 = xyy$  qui exprime la nature de l'une des hyperboles cubiques, & la soutangente  $PT = -2x$ . Il en est ainsi des autres.

Pour mener dans les paraboles la tangente au point  $A$  origine des  $x$ , il faut chercher quelle doit être la raison de  $dx$  à  $dy$  en ce point; car il est visible que cette raison étant connuë, l'angle que la tangente fait avec l'axe ou le diametre, sera aussi déterminé. On a dans cet exemple  $dx. dy :: my^{m-1}. r$ . D'où l'on voit que  $y$  étant zero en  $A$ , la raison de  $dy$  à  $dx$  doit y être infiniment grande lorsque  $m$  surpasse  $r$ , & infiniment petite lorsqu'elle est moindre: c'est-à-dire que la tangente en  $A$  doit être parallèle aux appliquées dans le premier cas, & se confondre avec le diametre dans le second.

E X E M P L E II.

12. Soit une ligne courbe  $AMB$  telle que  $AP \times PB$  Fig. 5.  $(x \times a - x). PM^2 (yy) :: AB(a). AD(b)$ . Donc  $\frac{ayy}{b} = ax - x.x$ , & en prenant les différences,  $\frac{2aydy}{b} = adx - 2x dx$ , d'où l'on tire  $PT$  ( $\frac{ydx}{dy}$ ) =  $\frac{2ayy}{ab - 2bx} = \frac{2ax - 2xx}{a - 2x}$ , en mettant pour  $\frac{ayy}{b}$  sa valeur  $ax - xx$ ; &  $PT = AP$  ou  $AT = \frac{ax}{a - 2x}$ .

Supposant à présent que  $AP \times PB = (x \times a - x^2). PM^2 (y^2) :: AB(a). AD(b)$ , & en prenant les différences  $\frac{2ay^2 dy}{b} = 3x \times dx \times a - x^2 - 2ax dx + 2x dx \times x^2$ , d'où l'on tire  $\frac{ydx}{dy} = \frac{3x^2 \times a - x^2 - 2ax \times x}{3a - 3x}$  &  $AT = \frac{3ax - 5xx}{3a - 3x}$ .

B ij

Et généralement si l'on veut que  $m$  marque l'exposant de la puissance de  $AP$ , &  $n$  celui de la puissance de  $PB$ , on aura  $\frac{ay^{m+n}}{b} = x^m \times a - x^n$  qui est une équation générale pour toutes les ellipses à l'infini, dont la différence est  $\frac{m+nay^{m+n}-1}{by} = mx^{m-1} dx \times a - nx^{n-1} dx \times x^m$ , d'où l'on tire (en mettant pour  $\frac{ay^{m+n}}{b}$  sa valeur  $x^m \times a - x^n$ )

$$PT \left( \frac{ydx}{dy} \right) = \frac{m+nay^{m+n}-1}{m \times \frac{1}{x} \times a - x^{n-1}} \times x^m = \frac{m+nay^{m+n}-1}{m+nax-x^n},$$

ou  $PT = \frac{m+nax-x^n}{m+nay^{m+n}-1}$ , &  $AT = \frac{nax}{m+nay^{m+n}-1}$ .

[...]



L'Hôpital: Figures

