# THÉORIE

## DES

# FONCTIONS ANALYTIQUES,

CONTENANT

Les Principes du Calcul différentiel, dégagés de toute considération d'infiniment petits, d'évanouissans, de limites et de fluxions, et réduits à l'analyse algébrique des quantités finies.

*Par J. L. Lagrange, de l'Institut des Sciences, Lettres et Arts, et du Bureau des Longitudes; Membre du Sénat-Conservateur, Grand-Officier de la Légion-d'Honneur, et Comte de l'Empire.*

NOUVELLE ÉDITION,

revue et augmentée par l'Auteur.

PARIS,

Mme Ve COURCIER, Imprimeur-Libraire pour les Mathématiques, quai des Augustins, n° 57.

1813.

# PREMIÈRE PARTIE.

EXPOSITION DE LA THÉORIE, AVEC SES PRINCIPAUX USAGES DANS L'ANALYSE.

## CHAPITRE PREMIER.

DÉVELOPPEMENT EN SÉRIE D'UNE FONCTION D'UNE VARIABLE LORSQU'ON ATTRIBUE UN ACCROISSEMENT A CETTE VARIABLE. FORMATION SUCCESSIVE DES TERMES DE LA SÉRIE. THÉORÈME IMPORTANT SUR LA NATURE DE CES SÉRIES.

1. Nous désignerons en général par la caractéristique $f$ ou F, placée devant une variable, toute fonction de cette variable, c'est-à-dire toute quantité dépendante de cette variable et qui varie avec elle suivant une loi donnée. Ainsi $f(x)$ ou $F(x)$ désignera une fonction de la variable $x$; $f(x^2), f(a+bx), \ldots$ désigneront des fonctions de $x^2$, de $a+bx$, .

Pour marquer une fonction de deux variables indépendantes, comme de $x, y$, nous écrirons $f(x, y)$, et ainsi des autres.

Lorsque nous voudrons employer d'autres caractéristiques pour marquer les fonctions, nous aurons soin d'en avertir.

Considérons donc une fonction $f(x)$ d'une variable quelconque $x$. Si à la place de $x$ on y met $x+i$, $i$ étant une quantité quelconque indéterminée, elle deviendra $f(x+i)$, et, par la théorie des séries, on pourra la développer en une série de cette forme

$$f(x)+pi+qi^2+ri^3+\ldots,$$

dans laquelle les quantités $p$, $q$, $r$, ..., coefficients des puissances de $i$, seront de nouvelles fonctions de $x$, dérivées de la fonction primitive $f(x)$ et indépendantes de l'indéterminée $i$.

[...]

# CHAPITRE II.

## FONCTIONS DÉRIVÉES; LEUR NOTATION ET LEUR ALGORITHME.

8. Nous avons vu que le développement de $f(x+i)$ donne naissance à différentes autres fonctions $p, q, r, \ldots$, toutes dérivées de la fonction principale $f(x)$, et nous avons donné la manière de trouver ces fonctions dans des cas particuliers. Mais, pour établir une théorie sur ces sortes de fonctions, il faut rechercher la loi générale de leur dérivation.

Pour cela, reprenons la formule générale

$$f(x+i)=f(x)+pi+qi^2+ri^3+\ldots,$$

et supposons que l'indéterminée $x$ devienne $x+o$, $o$ étant une quantité quelconque indéterminée et indépendante de $i$; il est visible que $f(x+i)$ deviendra $f(x+i+o)$, et l'on voit en même temps que l'on aurait le même résultat en mettant simplement $i+o$ à la place de $i$ dans $f(x+i)$. Donc aussi, le résultat doit être le même, soit qu'on mette, dans la série $f(x)+pi+qi^2+ri^3+\ldots$, $i+o$ à la place de $i$, soit qu'on y mette $x+o$ au lieu de $x$.

La première substitution donnera

$$f(x)+p(i+o)+q(i+o)^2+r(i+o)^3+\ldots,$$

savoir, en développant les puissances de $i+o$, et n'écrivant, pour plus de simplicité, que les deux premiers termes de chaque puissance, parce que la comparaison de ces termes suffira pour les déterminations dont nous avons besoin,

$$f(x)+pi+qi^2+ri^3+si^4+\ldots+po+2qio+3ri^2o+4si^3o+\ldots.$$

Pour faire l'autre substitution, soient $f(x)+f'(x)o+\ldots$, $p+p'o+\ldots$, $q+q'o+\ldots$, $r+r'o+\ldots$ ce que deviennent les fonctions $f(x)$, $p$, $q$, $r$, ... en y mettant $x+o$ pour $x$ et ne considérant dans le développement que les termes qui contiennent la première puissance de $o$; il est clair que la même formule deviendra

$$f(x)+pi+qi^2+ri^3+si^4+\ldots+f'(x)o+p'io+q'i^2o+r'i^3o+\ldots.$$

Comme ces deux résultats doivent être identiques quelles que soient les valeurs de $i$ et de $o$, on aura, en comparant les termes affectés de $o$, de $io$, de $i^2o$, etc.,

$$p=f'(x),\quad 2q=p',\quad 3r=q',\quad 4s=r',\quad \ldots.$$

Maintenant, de même que $f'(x)$ est la première fonction dérivée de $f(x)$, il est clair que $p'$ est la première fonction dérivée de $p$, que $q'$ est la première fonction dérivée de $q$, $r'$ la première fonction dérivée de $r$, et ainsi de suite. Donc, si, pour plus de simplicité et d'uniformité, on dénote par $f'(x)$ la première fonction dérivée de $f(x)$, par $f''(x)$ la première fonction dérivée de $f'(x)$, par $f'''(x)$ la première fonction dérivée de $f''(x)$, et ainsi de suite, on aura

$$p=f'(x),\qquad \text{et de là}\quad p'=f''(x);$$

donc

$$q=\frac{p'}{2}=\frac{f''(x)}{2},\qquad \text{et de là}\quad q'=\frac{f'''(x)}{2};$$

donc

$$r=\frac{q'}{3}=\frac{f'''(x)}{2.3},\qquad \text{et de là}\quad r'=\frac{f^{\text{IV}}(x)}{2.3};$$

donc

$$s=\frac{r'}{4}=\frac{f^{\text{IV}}(x)}{2.3\,4},\qquad s'=\frac{f^{\text{V}}(x)}{2.3.4};$$

et ainsi de suite.

Donc, substituant ces valeurs dans le développement de la fonction $f(x+i)$, on aura

$$f(x+i)=f(x)+f'(x)i+\frac{f''(x)}{2}i^2+\frac{f'''(x)}{2.3}i^3+\frac{f^{\text{IV}}(x)}{2.3.4}i^4+\ldots.$$

Cette nouvelle expression a l'avantage de faire voir comment les termes de la série dépendent les uns des autres, et surtout comment, lorsqu'on sait former la première fonction dérivée d'une fonction primitive quelconque, on peut former toutes les fonctions dérivées que la série renferme.

9. Nous appellerons la fonction $f(x)$ *fonction primitive* par rapport aux fonctions $f'(x)$, $f''(x)$, ... qui en dérivent, et nous appellerons celles-ci *fonctions dérivées* par rapport à celle-là. Nous nommerons de plus la première fonction dérivée $f'(x)$ *fonction prime*, la seconde fonction dérivée $f''(x)$ *fonction seconde*, la troisième fonction dérivée $f'''(x)$ *fonction tierce*, et ainsi de suite.

De la même manière, si $y$ est supposée une fonction de $x$, nous dénoterons ses fonctions dérivées par $y'$, $y''$, $y'''$, ..., de sorte que, $y$ étant une fonction primitive, $y'$ sera sa fonction *prime*, $y''$ en sera la fonction *seconde*, $y'''$ la fonction *tierce*, et ainsi de suite.

De sorte que, $x$ devenant $x+i$, $y$ deviendra

$$y + y'i + \frac{y''i^2}{2} + \frac{y'''i^3}{2.3} + \ldots.$$

Ainsi, pourvu qu'on ait un moyen d'avoir la fonction prime d'une fonction primitive quelconque, on aura, par la simple répétition des mêmes opérations, toutes les fonctions dérivées, et par conséquent tous les termes de la série qui résulte du développement de la fonction primitive.

Au reste, pour peu qu'on connaisse le Calcul différentiel, on doit voir que les fonctions dérivées $y'$, $y''$, $y'''$, ..., relatives à $x$, coïncident avec les expressions $\frac{dy}{dx}$, $\frac{d^2y}{dx^2}$, $\frac{d^3y}{dx^3}$, ....