Legendre

AVERTISSEMENT

POUR LA DOUZIÈME ÉDITION.

La démonstration de la théorie des parallèles, telle qu'elle avait été présentée dans la 3e édition de cet ouvrage et dans les éditions suivantes jusqu'à la 8e inclusivement, n'étant pas à l'abri de toute objection, on s'était déterminé dans la 9e édition à rétablir cette théorie à-peu-près sur la même base qu'Euclide. Des réflexions ultérieures faites sur le même objet, dont on donnera le développement dans la note II, ont fait découvrir deux nouvelles manières de démontrer le théorême sur les trois angles du triangle, sans le secours d'aucun *postulatum*. On a en conséquence inséré une de ces démonstrations dans le texte de cette édition, en choisissant celle qui s'éloigne le moins des idées ordinaires, et qui d'ailleurs ne semble pas plus difficile à comprendre que celle qui avait été donnée dans les éditions précédentes, depuis la 3e jusqu'à la 8e.

[...]

PROPOSITION XIX.

THÉORÈME.

Dans tout triangle, la somme des trois angles est égale à deux angles droits.

Soit ABC le triangle proposé dans lequel nous
fig. 35. supposerons (1) que AB est le plus grand côté et BC le plus petit, et qu'ainsi ACB est le plus grand angle,
pr. 14. et BAC le plus petit.

Par le point A et par le point I milieu du côté opposé BC, menez la droite AI que vous prolongerez en C' jusqu'à ce que AC'=AB; prolongez de même AB en B' jusqu'à ce que AB' soit double de AI.

Si on désigne par A, B, C, les trois angles du triangle ABC et semblablement par A',B',C' les trois angles du triangle AB'C', je dis qu'on aura l'angle C'=B+C, et l'angle A=A'+B', d'où résulte A+B+C=A'+B'+C', c'est-à-dire que la somme des trois angles est la même dans les deux triangles.

Pour le prouver, faites AK=AI et joignez C'K, vous aurez le triangle C'AK égal au triangle BAI. Car dans ces deux triangles, l'angle commun A est compris entre côtés égaux chacun à chacun, savoir: AC'=AB, et AK=AI. Donc le troisième côté C'K est égal au troisième BI; donc aussi l'angle AC'K=ABC, et l'angle AKC=AIB.

Je dis maintenant que le triangle B'C'K est égal au triangle ACI, car la somme des deux angles adjacens
* pr. 2. AKC'+C'KB' est égale à deux angles droits* ainsi que

(1) Cette supposition n'exclut pas le cas où le côté moyen AC serait égal à l'un des extrêmes AB ou BC.

la somme des deux angles $AIC + AIB$; retranchant de part et d'autre les angles égaux AKC', AIB, il restera l'angle $C'KB' = AIC$. Ces angles égaux dans les deux triangles sont compris entre côtés égaux chacun à chacun, savoir $C'K = IB = CI$, et $KB' = AK = AI$, puisqu'on a supposé $AB' = 2AI = 2AK$. Donc les deux triangles $B'C'K$, ACI, sont égaux*; donc le côté $C'B'$ $= AC$, l'angle $B'C'K = ACB$, et l'angle $KB'C' = CAI$. * pr. 6.

Il suit de là 1° que l'angle $AC'B'$ désigné par C' est composé de deux angles égaux aux angles B et C du triangle ABC, et qu'ainsi on a $C' = B + C$; 2° que l'angle A du triangle ABC est composé de l'angle A' ou $C'AB'$ qui appartient au triangle $AB'C'$ et de l'angle CAI égal à l'angle B' du même triangle, ce qui donne $A = A' + B'$; donc $A + B + C = A' + B' + C'$. D'ailleurs puisqu'on a par hypothèse $AC < AB$ et par conséquent $C'B' < AC'$, on voit que dans le triangle $AC'B'$ l'angle en A, désigné par A', est moindre que B', et comme la somme des deux est égale à l'angle A du triangle proposé, il s'en suit qu'on a l'angle A' $< \frac{1}{2}A$.

Si on applique la même construction au triangle $AB'C'$, pour former un troisième triangle $AC''B''$ dont les angles seront désignés par A'', B'', C'', on aura semblablement les deux égalités $C'' = C' + B'$, $A' = A'' + B''$, d'où résulte $A' + B' + C' = A'' + B'' + C''$. Ainsi la somme des trois angles est la même dans ces trois triangles: on aura en même tems l'angle $A'' < \frac{1}{2}A'$, et par conséquent $A'' < \frac{1}{4}A$.

Continuant indéfiniment la suite des triangles $AC'B'$, $AC''B''$, etc. on parviendra à un triangle abc dans lequel la somme des trois angles sera toujours la même que dans le triangle proposé ABC et qui aura l'angle a plus petit que tel terme qu'on voudra de la progression décroissante $\frac{1}{2}A$, $\frac{1}{4}A$, $\frac{1}{8}A$, etc.

On peut donc supposer cette suite de triangles prolongée jusqu'à ce que l'angle a soit moindre que tout angle donné.

Et si au moyen du triangle abc on construit le triangle suivant $a'b'c'$, la somme des angles $a'+b'$ de celui-ci sera égale à l'angle a, et sera par conséquent moindre que tout angle donné ; d'où l'on voit que la somme des trois angles du triangle $a'b'c'$ se réduit presque au seul angle c'.

Pour avoir la mesure précise de cette somme, prolongeons le côté $a'c'$ vers d', et appelons x' l'angle extérieur $b'c'd'$; cet angle x', joint à l'angle c' du triangle $a'b'c'$, fait une somme égale à deux angles droits*; ainsi en désignant l'angle droit par D, on aura $c'=2\,D-x'$; donc la somme des angles du triangle $a'c'b'$ sera

* pr. 2.

$$2\,D+a'+b'-x'.$$

Mais on peut concevoir que le triangle $a'c'b'$ varie dans ses angles et ses côtés, de manière à représenter les triangles successifs qui naissent ultérieurement de de la même construction et s'approchent de plus en plus de la limite où les angles a' et b' seraient nuls. Dans cette limite la droite $a'c'd'$ se confondant avec $a'b'$, les trois points a', c', b', finissent par être exactement en ligne droite; alors les angles b' et x' deviennent nuls en même tems que a', et la quantité $2\,D+a'+b'-x'$, qui mesure la somme des trois angles du triangle $a'c'b'$, se réduit à $2\,D$, donc *dans tout triangle la somme des trois angles est égale à deux angles droits.*

Corollaire I. Deux angles d'un triangle étant donnés, ou seulement leur somme, on connaîtra le troisième en retranchant la somme de ces angles de deux angles droits.

II. Si deux angles d'un triangle sont égaux à deux angles d'un autre triangle, chacun à chacun, le troisieme de l'un sera égal au troisieme de l'autre, et les deux triangles seront équiangles entre eux.

III. Dans un triangle il ne peut y avoir qu'un seul angle droit; car s'il y en avait deux, le troisieme devrait être nul; à plus forte raison un triangle ne peut-il avoir qu'un seul angle obtus.

IV. Dans un triangle rectangle la somme des deux angles aigus est égale à un angle droit.

V. Dans un triangle équilatéral chaque angle est le tiers de deux angles droits ou les deux tiers d'un angle droit. Donc si l'angle droit est exprimé par 1, l'angle du triangle équilatéral le sera par $\frac{2}{3}$.

VI. Dans tout triangle ABC si on prolonge le côté AB vers D, l'angle extérieur CBD sera égale à la somme des deux intérieurs opposés A et C; car en ajoutant de part et d'autre ABC, les deux sommes sont égales à deux angles droits.

[...]

PROPOSITION XXIII.

THÉORÈME.

fig. 37. *Si deux lignes droites AB, CD, font avec une troisieme EF, deux angles intérieurs d'un même côté, dont la somme soit plus petite ou plus grande que deux angles droits, les lignes* AB, CD, *prolongées suffisamment, devront se rencontrer.*

Soit 1° La somme BEF+EED plus petite que deux angles droits, menez FG de manière que l'angle EFG=AEF, vous aurez la somme BEF+EFG égale à la somme BEF+AEF et par conséquent égale à deux angles droits, et puisque BEF+EFD est plus petite que deux angles droits, la droite DF sera comprise dans l'angle EFG.

Par le point F tirez une oblique FM qui rencontre AB en M, l'angle AMF sera égal à GFM, puisqu'en ajoutant de part et d'autre une même quantité EFM +FEM, les deux sommes sont égales chacune à deux angles droits. Prenez ensuite MN=FM et joignez FN; l'angle AMF, extérieur au triangle FMN, est égal à la somme des deux intérieurs opposés MFN, MNF*; ceux-ci sont égaux entre eux, puisqu'ils sont opposés à des côtés égaux MN, FM; donc l'angle AMF ou son égal MFG est double de MFN; donc la droite FN divise en deux parties égales l'angle GFM et rencontre la ligne AB en un point N situé à la distance MN=FM.

*pr. 19. cor. 6.

Il suit de la même démonstration que si on prend NP=FN, on déterminera sur la ligne AB le point P où aboutit la droite FP qui fait l'angle GFP égal à la moitié de l'angle GFN, ou au quart de l'angle GFM.

On peut donc prendre ainsi successivement la moitié, le quart, le huitieme, etc. de l'angle GFM, et les lignes qui opèrent ces divisions, rencontreront la ligne

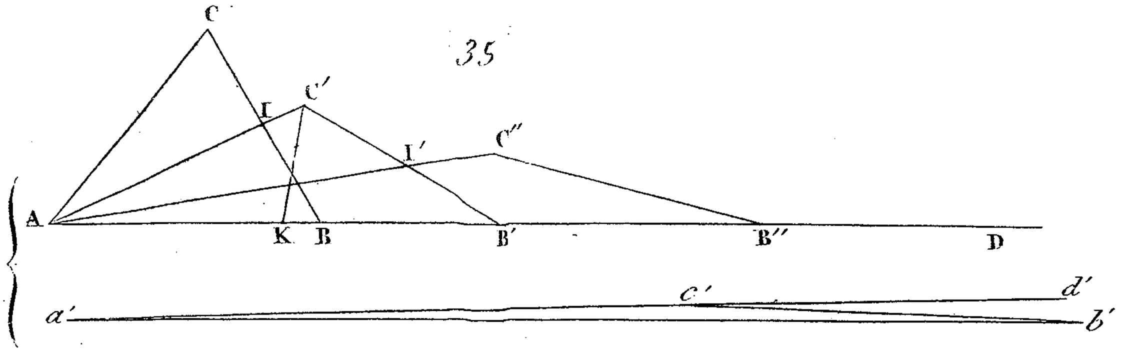
AB en des points de plus en plus éloignés, mais faciles à déterminer, puisque MN=FM, NP=FN, PQ=PF etc. On peut même observer que chaque distance d'un de ces points d'intersection au point fixe F, n'est pas tout à fait double de la distance du point d'intersection précédent, car FN par exemple est moindre que FM+MN ou 2FM; on a pareillement FP <2FN, FQ<2FP, etc.

Mais en continuant de sous-diviser l'angle GFM en raison double, on parviendra bientôt à un angle GFZ plus petit que l'angle donné GFD, et il sera encore vrai que FZ prolongée rencontre AB en un point déterminé : donc à plus forte raison la droite FD comprise dans l'angle EFZ, rencontrera AB.

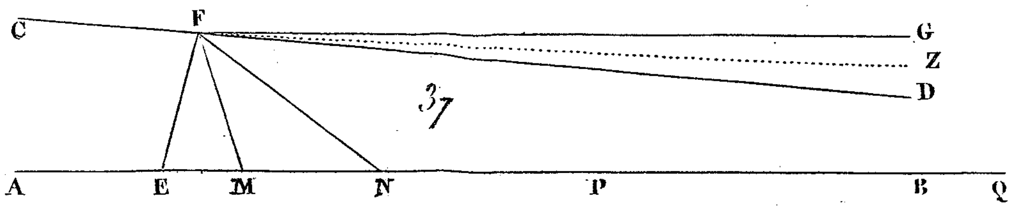
Supposons 2° que la somme des deux angles intérieurs AEF+CFE est plus grande que deux angles droits, si l'on prolonge AE vers B et CF vers D, la somme des quatre angles AEF, BEF, CFE, EFD, sera égale à quatre angles droits; donc si de cette somme on retranche AEF+CFE plus grande que deux angles droits, il restera la somme BEF+EFD plus petite que deux angles droits. Donc suivant le premier cas les lignes EB, FD, prolongées suffisamment, doivent se rencontrer.

Corollaire. Par un point donné F on ne peut mener qu'une seule parallèle à la ligne donnée AB; car ayant tiré FE à volonté, il n'y a qu'une ligne FG qui fasse la somme des deux angles BEF+EFG, égale à deux angles droits; toute autre droite FD ferait la somme des deux angles BEF+EFD plus petite ou plus grande que deux droits; et rencontrerait par conséquent la ligne AB.

[· · ·]



35



37

[...]