Lobachevski

ETUDES GEOMETRIQUES

sur la

THEORIE DES PARALLELES

Quelques-unes des théories de la géométrie élémentaire laissent encore beaucoup à désirer, et c'est à leur imperfection, je crois, qu'il faut attribuer le peu de progrès que cette science, en dehors des applications de l'analyse, a pu réaliser depuis Euclide.

Je compte parmi ces points défectueux l'obscurité qui règne sur les premières notions des grandeurs géométriques et sur la manière dont on se représente la mesure de ces grandeurs, ainsi que l'importante lacune que présente la théorie des parallèles, et que les travaux des géomètres n'ont encore pu combler. Les efforts de Legendre n'ont rien ajouté à cette théorie, cet auteur ayant été forcé de quitter la voie du raisonnement rigoureux pour se jeter dans des considérations détournées, et de recourir à des principes qu'il cherche, sans raison suffisante, à faire passer pour des axiomes nécessaires.

Mon premier essai sur les fondements de la géométrie a paru dans le *Courrier de Kasan*, pour l'année 1829. Désirant satisfaire à toutes les exigences des lecteurs, je me suis occupé ensuite de la rédaction de l'ensemble de cette science, et j'ai publié mon travail par parties dans les *Mémoires de l'Université de Kasan*, pour les années 1836, 1837, 1838, sous le titre de *Nouveaux principes de Géométrie, avec une théorie complète des parallèles*. L'étendue de ce travail a peut-être empêché mes compatriotes de suivre cette étude , qui, depuis Legendre, semblait avoir perdu son intérêt. Je n'en persiste pas moins à croire que la théorie des parallèles conserve toujours ses droits à l'attention des géomètres, et c'est pour cela que je me propose d'exposer ici ce qu'il y a d'essentiel dans mes recherches, en faisant d'abord remarquer, contrairement à l'opinion de Legendre, que les autres imperfections de principes, telles que la définition de la ligne droite, ne doivent point nous occuper ici, et sont sans aucune influence sur la théorie des parallèles.

Pour ne pas fatiguer le lecteur par une multitude de propositions dont les démonstrations n'offrent aucune difficulté, j'indiquerai seulement ici celles dont la connaissance est nécessaire pour ce qui va suivre.

---

1 – *Une ligne droite se superpose à elle-même dans toutes ses positions.* J'entends par là que, si l'on fait tourner autour de deux points de la ligne droite la surface qui la contient, cette ligne ne change pas de place.

2 – Deux lignes droites ne peuvent se couper en deux points.

3 – Une ligne droite, suffisamment prolongée dans les deux sens, pourra dépasser toute limite, et partagera ainsi en deux parties toute portion de plan limitée.

4 – Deux lignes droites perpendiculaires à une troisième, et situées dans un même plan que cette troisième, ne peuvent se couper, quelque loin qu'on les prolonge.

5 – Une ligne droite coupera toujours une autre droite, lorsqu'elle aura des points situés de part et d'autre de celle-ci.

6 – Des angles opposés par le sommet et ayant leurs côtés situés sur les prolongements les uns des autres sont égaux. Cette proposition est vraie aussi pour les angles dièdres.

7 – Deux lignes droites ne peuvent se couper, lorsqu'elles sont coupées par une troisième sous des angles égaux.

8 – Dans un triangle rectiligne, à des côtés égaux sont opposés des angles égaux, et réciproquement.

9 – Dans un triangle rectiligne, à un plus grand côté est opposé un plus grand angle. Dans un triangle rectangle, l'hypothénuse est plus grande que chacun des côtés de l'angle droit, et les deux angles adjacents à l'hypothénuse sont aigus.

10 – Deux triangles rectilignes sont égaux lorsqu'ils ont un côté égal et deux angles égaux, ou deux côtés égaux comprenant un angle égal, ou deux côtés égaux et l'angle opposé au plus grand de ces deux côtés égal, ou enfin les trois côtés égaux.

[...]

Les propositions que nous donnerons dans ce qui va suivre seront accompagnées de leurs explications et de leurs démonstrations.

16 – Toutes les droites tracées par un même point dans un plan peuvent se distribuer, par rapport à une droite donnée dans ce plan,

en deux classes, à savoir : en droites *qui coupent* la droite donnée, et en droites *qui ne la coupent pas*. La droite qui forme la *limite* commune de ces deux classes est dite *parallèle* à la droite donnée.

Soit abaissée, du point A (fig.1), sur la droite BC, la perpendiculaire AD, et soit élevée au point A, sur la droite AD, la perpendiculaire AE. Dans l'angle droit EAD, il arrivera ou que toutes les droites partant du point A rencontreront la droite DC, comme le fait AF, par exemple ; ou bien que quelques-unes d'entre elles, comme la perpendiculaire AE, ne rencontreront pas DC. Dans l'incertitude si la perpendiculaire AE est la seule droite qui ne rencontre pas DC, nous admettrons la possibilité qu'il existe encore d'autres lignes, telles que AG, qui ne coupent pas DC, quelque loin qu'on les prolonge. En passant des lignes AF, qui coupent CD, aux lignes AG, qui ne coupent pas CD, on trouvera nécessairement une ligne AH, parallèle à DC, c'est-à-dire une ligne d'un côté de laquelle les lignes AG ne rencontrent pas la ligne CD, tandis que, de l'autre côté, toutes les lignes AF rencontrent CD. L'angle HAD, compris entre la parallèle AH et la perpendiculaire AD, sera dit *l'angle de parallélisme*, et nous le désignerons par $\Pi(p)$, p représentant la distance AD.

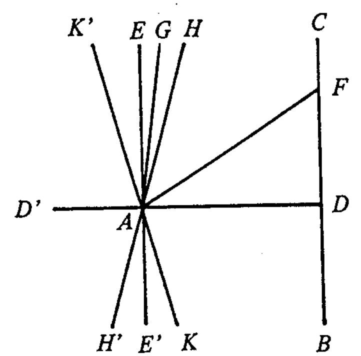

Fig. 1

Si $\Pi(p)$ est un angle droit, le prolongement AE' de la perpendiculaire AE sera également parallèle au prolongement DB de la droite DC ; et nous ferons remarquer, à ce propos, que, par rapport aux quatre angles formés au point A par les perpendiculaires AE, AD et par leurs prolongements AE', AD', toute droite partant du point A est comprise, soit par elle-même, soit par son prolongement, dans un des deux angles droits dirigés vers BC, de sorte qu'à l'exception de la seule parallèle EE', toutes ces droites, prolongées suffisamment dans les deux sens, devront couper la droite BC.

Si l'on a $\Pi(p) < \frac{\pi}{2}$, alors, de l'autre côté de AD, il y aura une autre droite AK, faisant avec AD le même angle $DAK = \Pi(p)$, laquelle sera parallèle au prolongement DB de la ligne DC ; de sorte que, dans cette hypothèse, il faut distinguer encore le *sens du parallélisme*. Toutes les autres droites comprises dans l'intérieur des deux angles droits dirigés vers BC appartiennent aux droites *sécantes*, lorsqu'elles sont situées dans l'angle $HAK = 2\,\Pi(p)$ des deux parallèles ; elles appartiennent, au contraire, aux droites *non sécantes* AG, lorsqu'elles sont situées de l'autre côté des parallèles AH, AK, à l'intérieur des deux angles $EAH = \frac{\pi}{2} - \Pi(p)$, $E'AK = \frac{\pi}{2} - \Pi(p)$, entre les parallèles et la droite EE', perpendiculaire sur AD. De l'autre côté de la perpendiculaire EE', les prolongements AH', AK' des parallèles AH, AK seront également parallèles à BC. Parmi les autres droites, celles qui sont dans l'angle $K'AH'$ appartiendront aux droites sécantes, celles qui sont dans les angles $K'AE$, $H'AE'$, aux droites non sécantes.

D'aprés cela, si l'on suppose $\Pi(p) = \frac{\pi}{2}$, les droites ne pourront être que sécantes ou parallèles. Mais, si l'on admet que $\Pi(p) < \frac{\pi}{2}$, on devra considérer alors deux parallèles, l'une dans un sens, l'autre dans le sens opposé ; de plus, les autres droites devront se distinguer en *non sécantes* et en *sécantes*. Dans les deux hypothèses, le caractère du parallèlisme est que la ligne devient sécante par la moindre déviation vers le côté où est située la parallèle ; de sorte que, si AH est parallèle à DC, toute ligne AF, faisant, du côté de DC, un angle HAF aussi petit que l'on voudra avec AH, coupera nécessairement DC.

17 – *Une ligne droite conserve le caractère du parallélisme en tous ses points.*

Soit AB (fig. 2) parallèle à CD, et AC perpendiculaire sur CD. Considérons deux points pris à volonté sur la ligne AB et sur son prolongement au delà de la perpendiculaire. Supposons le point E situé, par rapport à la perpendiculaire, du même côté que celle des directions de AB qui est considérée comme parallèle à CD. Abaissons du point E sur CD la perpendiculaire EK, et menons ensuite EF de manière qu'elle tombe à l'intérieur de l'angle BEK. Joignons les points A et F par une droite, dont le prolongement devra rencontrer CD quelque part en G (prop. 16). Nous obtiendrons ainsi un triangle ACG, dans l'intérieur duquel pénétrera la ligne EF. Cette dernière ligne, ne pouvant rencontrer AC, par suite de la construction, et ne pouvant pas non plus rencontrer AG ni EK pour la seconde fois (prop. 2), coupera nécessairement CD quelque part, en H (prop. 3).

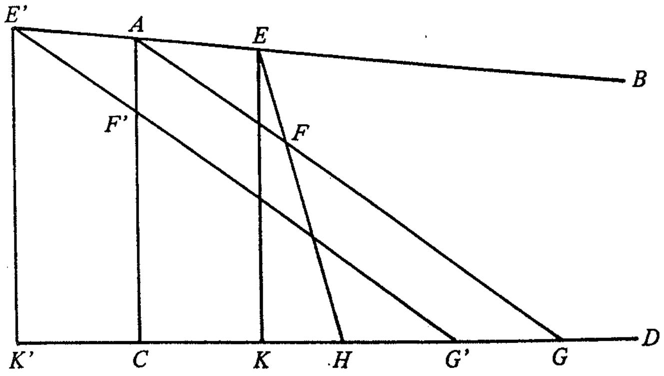

Fig. 2

Soit maintenant E' un point sur le prolongement de AB, et $E'K'$ une perpendiculaire abaissée sur le prolongement de CD. Menons la ligne $E'F'$, faisant avec AE' un angle $AE'F'$ assez petit pour couper AC quelque part en F'. Tirons du point A la ligne AF, faisant avec AB un angle égal à $AE'F'$, et dont le prolongement coupera CD en G (prop. 16). On formera ainsi un triangle AGC, dans lequel pénétrera le prolongement de la ligne $E'F'$. Or cette ligne ne peut pas rencontrer une seconde fois AE ; elle ne peut pas non plus couper AG, puisque l'angle $BAG = BE'G'$ (prop. 7). Il faudra donc qu'elle rencontre CD quelque part en G'.

Donc, quels que soient les points E, E', d'où partent les lignes EF, $E'F'$, et quelque peu qu'elles s'ecartent de la ligne AB, elles couperont toujours la ligne CD, à laquelle AB est parallèle.

18 – *Deux droites sont toujours réciproquement parallèles.*

Soit AC (fig. 3) une perpendiculaire sur CD, et AB une parallèle à CD. Menons par le point C la ligne CE, faisant avec CD un angle aigu quelconque ECD, et abaissons du point A sur CE la perpendiculaire AF. Nous formerons ainsi un triangle rectangle ACF, dont l'hypothénuse AC sera plus grande que le côté

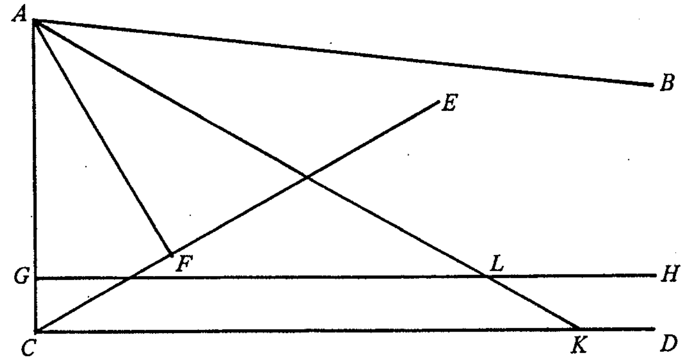

Fig. 3

AF de l'angle droit (prop. 9). Faisons $AG = AF$, et plaçons AF sur AG; AB et FE prendront les positions AK et GH, de sorte que l'on aura l'angle $BAK = FAC$. Il faudra alors que AK coupe la droite DC quelque part en K (prop. 16), et il en résultera un triangle AKC, dans lequel la perpendiculaire GH rencontrera la ligne AK en L (prop. 3), et déterminera par là la distance AL du point A au point de rencontre de la ligne CE avec AB.

De là résulte que CE coupera toujours AB, quelque petit que soit l'angle ECD. Donc CD est parallèle à AB (prop. 16).

[...]

[...]

On voit aisément que, lorsque p diminue, l'angle α croît, et qu'il s'approche de $\frac{\pi}{2}$, lorsque p tend vers zéro. Au contraire, lorsque p croît, l'angle α diminue,

, et il s'approche de plus en plus de 0, à mesure que p tend vers ∞. Comme on peut choisir arbitrairement l'angle que l'on désignera par la notation $\Pi(p)$, lorsque p sera exprimé par un nombre négatif, nous poserons la relation

$$\Pi(p) + \Pi(-p) = \pi,$$

relation qui aura lieu pour toutes les valeurs, tant positives que négatives, de p, aussi bien que pour $p = 0$.

24 – *Si l'on prolonge de plus en plus loin deux lignes parallèles dans le sens de leur parallèlisme, elles s'approcheront de plus en plus l'une de l'autre.*

Elevons sur la ligne AB (fig. 11) deux perpendiculaires $AC = BD$, et joignons leurs extrémités C et D par une droite. Le quadrilatére $CABD$ aura, en A et en B, deux angles droits, et en C et D

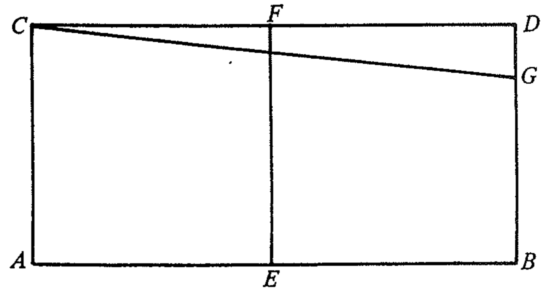

Fig. 11

deux angles aigus (prop. 22), lesquels seront égaux entre eux, comme il est aisé de s'en convaincre, si l'on imagine le quadrilatère superposé à lui-même, en plaçant la ligne BD sur AC, et la ligne AC sur BD. Partageons AB en deux parties égales, et au milieu E élevons sur AB la perpendiculaire EF, laquelle devra être en même temps perpendiculaire sur CD, puisque les quadrilatères $CAEF$, $FEBD$ coïncideront l'un avec l'autre, si l'on plie la figure totale autour de FE. Donc la ligne CD ne peut être parallèle à la ligne AB ; mais la parallèle à AB menée par le point C, savoir la ligne CG, devra s'écarter de CD vers AB (prop. 16), et retranchera de la perpendiculaire BD une portion $DG < CA$, Le point C étant pris à volonté sur la ligne CG, il en résulte que CG s'approchera d'autant plus de AB, qu'on la prolongera plus loin.

[...]

[...]

Les quatre équations qui exprimeront les relations entre les côtés a, b, c, et les angles opposés A, B, C, dans un triangle rectiligne seront d'après cela (équation (3), (5), (6), (7))

$$(8)\quad \begin{cases} \sin A \ \operatorname{tang} \Pi(a) = \sin B \ \operatorname{tang} \Pi(b), \\[2mm] \cos A \ \cos \Pi(b) \ \cos \Pi(c) + \dfrac{\sin \Pi(b) \ \sin \Pi(c)}{\sin \Pi(a)} = 1, \\[2mm] \cot A \ \sin C \ \sin \Pi(b) + \cos C = \dfrac{\cos \Pi(b)}{\cos \Pi(a)}, \\[2mm] \cos A + \cos B \ \cos C = \dfrac{\sin B \ \sin C}{\sin \Pi(a)}. \end{cases}$$

Si les côtés du triangle sont très petits, on pourra se contenter des déterminations approchées (prop. 36)

$$\cot \Pi(a) = a,$$
$$\sin \Pi(a) = 1 - \frac{1}{2}a^2,$$
$$\cos \Pi(a) = a$$

et de même pour les autres côtés b, c. Pour un tel triangle, les équations (8) deviennent donc

$$b \sin A = a \sin B,$$
$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A,$$
$$a \sin(A + C) = b \sin A,$$
$$\cos A + \cos(B + C) = 0.$$

Les deux premières de ces quatre équations sont celles que fournit la géométrie ordinaire. Les deux dernières, combinées avec les premières, conduisent à la relation

$$A + B + C = \pi.$$

Donc la géométrie imaginaire se change dans la géométrie ordinaire lorsque l'on suppose les côtés d'un triangle rectiligne très petits.

J'ai publié, dans les *Mémoires de l'Université de Kasan* quelques recherches sur la mesure des lignes courbes, des figures planes, des aires et des volumes des corps, ainsi que sur l'application de la géométrie imaginaire à l'analyse ([1]).

Les équations (8) constituent par elles-mêmes une raison suffisante pour considérer comme possible l'hypothèse de la géométrie imaginaire. Il n'existe donc pas d'autre moyen que les observations astronomiques pour s'assurer de l'exactitude des calculs auxquels conduit la géométrie ordinaire. Cette exactitude s'étend très loin, comme je l'ai fait voir dans un de mes Mémoires. Ainsi, dans les triangles qui sont accessibles à nos moyens de mesure, on n'a pas encore trouvé que la somme des trois angles différât d'un centième de seconde de deux angles droits.

[...]