développement, il pourra être considéré comme un musée modèle. »

C'est à l'aide des collections du Musée Fleuriau que le département de la Charente-Inférieure a été en mesure de fournir son contingent à la description scientifique de la France, à la satifaction du Comité des Sociétés savantes. M. Théodore Vivier a rédigé la partie géologique et minéralogique; M. Édouard Beltremieux, la partie zoologique et paléontologique; MM. Faye et de Richemond, la partie botanique; MM. Fromentin et Sauvé, l'anthropologie, et M. Potel, la météorologie.

La salle géologique du Musée renferme un plan en relief du pertuis d'Antioche et des rades de la Rochelle et de l'île d'Aix, ainsi qu'une empreinte en plâtre qui permet d'en obtenir plusieurs exemplaires. Il n'est pas besoin d'insister pour faire ressortir l'utilité pratique de ce travail, qui se recommande par sa consciencieuse exactitude.

Remarques sur la nature des quantités définies par la condition de servir de limites à des variables données, par M. Charles Méray, professeur à la Faculté des sciences de Dijon.

I. La théorie des quantités incommensurables, celle des séries, des quadratures, et en général toutes les parties des mathématiques où il y a lieu de considérer des limites de quantités variables, ont pour fondement essentiel les principes suivants :

1° Une quantité variable v, qui prend successivement les valeurs en nombre indéfini :

$$v_1, v_2, \ldots, v_n \ldots\ldots,$$

tend vers une certaine limite, si les termes de cette limite vont toujours soit en augmentant, soit en diminuant, pourvu qu'ils restent dans le premier cas inférieurs, dans le second supérieurs à une quantité fixe quelconque.

2° La variable v, définie comme ci-dessus, jouit encore de la même propriété si la différence $v_{n+p} - v_n$ tend vers zéro quand n augmente indéfiniment, quelque relation qu'on puisse établir entre n et p.

Jusqu'à présent on a regardé ces propositions comme des axiomes.

Toutefois, en les examinant avec attention, j'ai reconnu qu'on peut ramener la seconde à la première, dont le caractère d'évidence est plus prononcé, et même finalement qu'il est possible de se passer de l'une et de l'autre. En procédant de cette manière, on suit, il est vrai, une voie plus détournée, mais elle est plus sûre, et on échappe à la nécessité d'introduire dans le raisonnement la conception assez obscure de nombre incommensurable. C'est ce que je me propose d'exposer aussi brièvement que le commande la nature élémentaire et aride d'un pareil sujet.

II. Je commence par la démonstration du dernier principe; ce point n'est pas sans intérêt, surtout si l'on n'adopte pas les idées que je proposerai tout à l'heure. On n'oubliera pas que j'admets en ce moment l'exactitude de l'autre proposition.

1° *Quel que soit le nombre n il existe deux quantités l_k, L_k telles que l'on a*

$$l_k < v_n < L_k,$$

pour toute valeur de n supérieure à k.

En effet, si la limite supérieure L_k n'existait pas, v_n pourrait être rendue plus grande que toute quantité donnée, et il serait possible de choisir successivement et indéfiniment les nombres k', k'', k'''... de manière à obtenir :

$$v_{k'} > v_k + a, \quad v_{k''} > v_{k'} + a, \quad v_{k'''} > v_{k''} + a, \ldots,$$

où a désigne une quantité positive quelconque. Or on en conclurait, contrairement à l'hypothèse, qu'en attribuant à n les valeurs successives k, k', k'', k''',..., qui croissent à l'infini, et à p les valeurs correspondantes $k'-k$, $k''-k'$, $k'''-k''$,....., la différence $v_{n+p} - v_n$ conserverait une valeur supérieure à a.

L'existence de l_k s'établit de la même manière.

2° *Quel que soit k, on peut, sauf à prendre h suffisamment grand, supposer à la fois ou*

$$l_h > l_k, \quad L_h \leqq L_k;$$

ou

$$l_h \geqq l_k, \quad L_h < L_k.$$

Sinon, en effet, concevons deux quantités l', L', dont la seconde surpasse la première et qui satisfassent à toutes ces conditions, c'est-à-dire telles que l'on ait :

$$l_k \leqq l' < L' < L_k.$$

Quelque valeur de v que l'on considère, il en existera de rangs plus éloignés qui seront les unes égales ou supérieures à L', les autres égales ou inférieures à l'; car autrement on pourrait prendre soit $l_h = l'$, soit $L_h = L'$. Ainsi on peut trouver un nombre h assez grand pour avoir $v_h \geqq L'$, puis un autre $h' > h$ qui fasse $v_{h'} \leqq l'$, puis un troisième $h'' > h$ qui ramène la première inégalité $v_{h''} \geqq L'$, et ainsi de suite alternativement jusqu'à l'infini.

Il arriverait donc, contrairement à l'hypothèse, que la différence $v_{n+p} - v_n$ conserverait une valeur numérique au moins égale à $L' - l'$ pour les valeurs indéfiniment croissantes $h, h', h'', \ldots$ attribuées à n, et les valeurs correspondantes $h' - h$, $h'' - h'$, $h''' - h''$, ... imposées à p.

On pourra ainsi assigner successivement à v deux premières limites l_{h_0}, L_{h_0}, puis deux autres l_{h_1}, L_{h_1}, renfermées (l'une au moins) dans l'intervalle des précédentes, puis deux nouvelles l_{h_2}, L_{h_2}, encore plus rapprochées que celles-ci, et cela indéfiniment.

3° *Si les termes de la suite l_{h_0}, l_{h_1}, l_{h_2}, ... ne finissent pas par conserver une valeur constante, ils tendent nécessairement vers une certaine limite.*

Il en est de même pour ceux de L_{h_0}, L_{h_1}, L_{h_2}, ...

Car alors les premiers vont toujours en augmentant sans pouvoir surpasser L_{h_0}, puisqu'ils sont inférieurs à des valeurs de v, elles-mêmes inférieures à L_{h_0}. Les derniers diminuent sans cesse en restant de même au-dessus de l_{h_0}, et on peut appliquer à ces deux suites l'axiome I.

Nous nommerons l, L les limites de ces suites ou bien les valeurs constantes que leurs termes finissent par conserver. Cette dernière particularité ne peut pas avoir lieu pour toutes deux à la fois (2°).

4° *Les quantités l, L sont égales.*

Car autrement on aurait $l < L$, et la considération de deux quantités l', L', choisies de manière à satisfaire aux conditions

$$l < l' < L' < L,$$

amènerait, comme ci-dessus (2°), à trouver pour n des valeurs croissant à l'infini, et pour p des valeurs correspondantes qui maintiendraient la valeur numérique de $v_{n+p} - v_n$ au moins égale à $L' - l'$.

5° *La variable v converge vers λ, valeur commune de l*, L.

En effet, les quantités $\lambda - l_{n_i}$, $\lambda - L_{n_i}$ sont infiniment petites, et par suite aussi leur différence $L_{n_i} - l_{n_i}$. Or en valeur absolue celle-ci surpasse $\lambda - v_{n_i}$, donc cette dernière a pour limite zéro.

Maintenant faisons croître n indéfiniment d'une manière quelconque, on a

$$\lambda - v_n = (\lambda - v_{n_i}) + (v_{n_i} - v_n),$$

où on peut supposer n_i supérieur à n, et où par suite, en vertu de l'hypothèse admise, $v_{n_i} - v_n$ est une quantité infiniment petite. Donc, comme on voulait le prouver, v_n converge vers une certaine limite λ.

Une fois démontrée pour les quantités réelles, cette proposition s'étend d'elle-même aux quantités imaginaires.

III. Revenons au premier principe. Toute méthode propre à constater l'existence d'une quantité remplissant des conditions déterminées repose essentiellement sur quelque procédé à l'aide duquel on pourrait calculer d'après les données la *valeur* même de cette inconnue. Or les notions fournies par notre axiome sur la nature de la variable ne permettent pas à elles seules de découvrir la valeur de sa limite; donc elles ne suffisent pas non plus à en établir l'existence. Et l'axiome lui-même devient inutile dès qu'il s'agit d'une variable dont les données accessoires de la question permettent de calculer la limite. Dans ce cas, en effet, on n'a que faire de savoir que l'existence de la limite tient à ce que la variable se modifie progressivement de telle ou telle manière.

Mais, en outre, n'est-ce pas en quelque sorte se contredire soi-même que de vouloir rattacher l'existence *analytique* d'un objet à une hypothèse qui ne l'assujettit à correspondre à aucun nombre, et qui, partant, ne lui confère pas le seul titre auquel il soit permis de l'introduire dans les calculs? Je suis porté à le croire et à attribuer précisément à cette cause la difficulté qu'on éprouve toujours à approfondir la notion de quantité incommensurable.

Ainsi la théorie dont nous nous occupons repose encore sur une vérité qui sera toujours précaire et sur une notion qu'il ne paraît pas facile de bien préciser. Mais les énoncés actuels dissimulent des propriétés spéciales des nombres proprement dits; il suffira de les en extraire pour tourner ce double obstacle. C'est ainsi qu'il a fallu procéder pour ressaisir la véritable nature des quantités imaginaires oubliée un instant dans le développement rapide de cette admirable conception.

IV. Je réserverai maintenant la dénomination de nombre ou quantité aux entiers et fractions; j'appellerai *variable progressive* toute quantité v qui reçoit successivement diverses valeurs en nombre illimité.

Soit v_n la valeur de rang n de v : si n croissant à l'infini il existe un nombre V tel que, à partir d'une valeur convenable de n, $V - v_n$ reste inférieure à une quantité quelconque aussi petite qu'on puisse la supposer, on dit que v a pour limite V, et on voit immédiatement que $v_{n+p} - v_n$ a pour limite zéro, quelle que soit la loi de croissance simultanée imposée à n et p.

S'il n'y a point de semblable nombre, il n'est plus permis, analytiquement parlant, d'affirmer que v a une limite; mais, si dans ce cas la différence $v_{n+p} - v_n$ converge toujours vers zéro, la nature de v offre une ressemblance extraordinaire avec celle des variables réellement douées de limites. Il nous faut un terme spécial pour exprimer la propriété remarquable de cette différence dont il s'agit : je dirai que la variable progressive v est *convergente*, qu'elle ait ou non une limite numériquement assignable.

L'existence d'une limite pour une variable convergente rend facile l'énonciation de certaines de ses propriétés qui ne dépendent point de cette particularité, et qu'il serait souvent beaucoup plus incommode de formuler directement. On conçoit donc qu'il soit avantageux, dans le cas où il n'y a point de limite, de conserver le langage abrégé propre à celui où il en existe une; et, pour exprimer la convergence de la variable, on dira simplement : *elle a une limite (fictive)*.

Voici un premier exemple de l'utilité de cette convention : si, m, n augmentant tous deux à l'infini, la différence $u_m - v_n$ de deux variables convergentes tend vers zéro pour une certaine dépendance mutuelle entre ces indices, on prouve aisément qu'elle reste infiniment petite pour toute autre loi; je dirai alors que les variables u, v sont *équivalentes*, et on voit de suite que deux variables équivalentes à une troisième le sont entre elles. Quand $u_m - v_n$ ne tend pas vers zéro, on prouve que cette différence est convergente et reste équivalente à elle-même, soit que la relation de m à n vienne à changer, soit que l'on remplace u, v par des variables respectivement équivalentes.

Maintenant supposons que u, v aient des limites U, V : si u, v sont équivalentes, U, V seront égales, sinon U — V sera la limite de $u_m - v_n$, et son signe celui que cette quantité finira par conserver. Supposons, au contraire, que u, v n'aient point de limites (numériques) : il y aura avantage à dire toujours (au figuré) qu'elles ont des limites égales, si elles sont équivalentes, sinon que la limite (fictive) de u est supérieure ou inférieure à celle de v, selon que $u - v$ finit par rester positive ou négative.

On pourra nommer valeur de la limite réelle ou fictive de v *approchée à δ près* tout nombre λ, tel que la différence $\lambda - v_n$ finisse par conserver une valeur numérique inférieure à δ. Enfin un signe quelconque propre à rappeler, à la fois, la nature des calculs qui définissent v_n et les valeurs numériques des quantités sur lesquelles on doit les exécuter, désignera commodément dans le langage, la limite fictive; le même signe pourra représenter dans les formules le nombre indéterminé qui en représente la valeur approchée, calculée à un degré d'approximation de plus en plus et indéfiniment élevé, c'est-à-dire, au fond, toute variable progressive équivalente à v.

V. Ces considérations s'appliquent à tout ce que l'on nomme nombres incommensurables; nous allons chercher ce qu'il faut entendre par une fonction de semblables nombres, et nous commencerons par l'examen des fonctions rationnelles.

Une fonction rationnelle $f(x, y, z, \ldots)$ est continue, quand la différence $f(x+h, y+k, \ldots) - f(x, y, \ldots)$ converge vers zéro lorsque $h, k, \ldots$ y tendent eux-mêmes, quelles que soient et la dépendance mutuelle de ces accroissements et la manière dont puissent varier en même temps, x, y, z, ... Nous exceptons, bien entendu, les valeurs des variables qui annuleraient le dénominateur de la fonction.

Cela posé, substituons aux nombres $x, y, z, \ldots$ des variables progressives convergentes $u_m, v_n, w_p, \ldots$ et faisons croître indéfiniment les indices. On démontrera facilement la proposition suivante :

La variable progressive $\omega = f(u_m, v_n, w_p, \ldots)$ est convergente et reste équivalente à elle-même, soit que l'on change la dépendance mutuelle des *indices, soit que l'on remplace $u_m, v_n, w_p, \ldots$ par d'autres variables respectivement équivalentes.*

Quand $u, v, w, \ldots$ ont des limites (numériques) $U, V, W, \ldots$, la quantité $\Omega = f(U, V, W, \ldots)$ est la limite de ω, et l'énonciation de ce fait équivaut à celle du théorème précédent. Mais, si quelques-unes de ces quantités en sont dépourvues, il sera toujours permis, pour exprimer commodément la dépendance de ω à $u, v, w, \ldots$, de dire que ω a une limite réelle ou fictive égale à la substitution des limites réelles ou fictives de $u, v, w, \ldots$, à ces variables elles-mêmes dans $f(u, v, w, \ldots)$, et d'écrire symboliquement :

$$\lim.\ \omega = f(U, V, W, \ldots).$$

J'ai admis implicitement que les coefficients de $f(x, y, z, \ldots)$ sont des nombres proprement dits; s'il en est autrement, soient a, $b, c, \ldots$, des variables progressives ayant ces coefficients $A, B, C, \ldots$ pour limites fictives. La relation de ω à $u, v, w, \ldots$ d'une part, a, b, c, d'autre part, s'exprimera toujours par l'égalité symbolique :

$$\lim.\ \omega = f(U, V, W, \ldots, A, B, C, \ldots);$$

mais on pourra, comme ci-dessus, la réduire à :

$$\lim.\ \omega = f(U, V, W, \ldots),$$

en sous-entendant qu'il s'agit seulement de la dépendance qu'établit entre ω et u, v, $w, \ldots$ la nature de la fonction rationnelle, et la condition pour a, b, $c, \ldots$ de rester équivalents à eux-mêmes.

VI. Soit ω une variable dont la valeur résulte d'opérations rationnelles déterminées exécutées sur des variables progressives convergentes $u_m, v_n, w_p, \ldots$, et sur des nombres entiers μ, ν, $\varpi, \ldots$; si la nature des calculs est telle que ω soit convergente et reste équivalente à elle-même quand les nombres $m, n, p, \ldots, \mu, \nu, \varpi, \ldots$, croissent à l'infini suivant une loi quelconque, et aussi quand on substitue à $u, v, w, \ldots$ d'autres variables équivalentes quelconques, on peut dire encore, soit au propre, soit au figuré, que ω a une limite. Et $U, V, W, \ldots$ désignant les limites réelles ou fictives de $u, v, x, \ldots$, on écrira :

$$\lim.\ \omega = f(U, V, W, \ldots),$$

où le signe f rappelle la nature des calculs qui définissent ω.

Si ω équivaut à quelque fonction rationnelle de $u, v, w, \ldots$ à coefficients invariables (au moins sous le rapport de leur équivalence), $f(U, V, W, \ldots)$ représentera la même fonction de $U, V, W, \ldots$, sinon on aura obtenu une fonction transcendante (ou irrationnelle) de ces quantités idéales.

Telle est, à notre point de vue, l'idée la plus générale qu'on puisse se faire d'une fonction transcendante; il n'en est aucune à laquelle on ne puisse assigner une semblable origine.

A présent, on doit apercevoir en quoi consiste une équation quelconque entre des quantités commensurables ou incommensurables: c'est l'énonciation abrégée et pittoresque du fait que certains calculs opérés sur la valeur numérique des unes, sur des variables progressives qui ont les autres pour limites fictives, et au besoin sur des nombres entiers croissant à l'infini, donnent une variable progressive qui tend vers zéro, quelque relation que l'on établisse entre ces nombres entiers et de quelque manière que l'on change la nature des variables progressives soumises au calcul, pourvu qu'elles restent équivalentes à elles-mêmes. Il faut considérer la conception de fonction de quantités incommensurables comme un simple moyen de faciliter la description, la classification et la notation des innombrables relations de cette espèce que l'on peut imaginer entre des variables convergentes diverses.

VII. En résumé, à toute quantité dite incommensurable correspondent une infinité de variables progressives (commensurables) convergentes, dont l'équivalence peut s'exprimer en disant qu'elles ont pour limite commune la quantité dont il s'agit.

A toute fonction correspond une variable progressive convergente se formant rationnellement au moyen d'entiers indéfiniment croissants, et d'autres variables progressives commensurables, de manière à rester équivalente à elle-même dans toutes ses déterminations.

Enfin, toute relation entre des quantités commensurables ou incommensurables exprime, pour une certaine variable progressive commensurable dépendant des données d'une manière qui varie avec la nature de la relation, la propriété de converger constamment vers zéro.

Les quantités imaginaires, n'étant que des combinaisons de deux quantités réelles, donnent lieu aux mêmes considérations.

Il me reste à éclaircir ces généralités par quelques exemples.

1° On peut imaginer une infinité de variables progressives dont les carrés tendent vers un nombre donné a, et on démontre facilement qu'elles sont toutes convergentes et équivalentes. C'est ce fait très-positif que l'on exprime en disant que *tout nombre a une racine carrée*, proposition qui n'est pas vraie quand on laisse aux mots leur sens littéral.

Quand a n'est pas carré, $\sqrt{a}$ désignera dans le langage cette racine fictive, et dans les calculs toute variable progressive dont le carré tend vers a. Si par des voies différentes on obtient une variable convergente dont on puisse constater l'équivalence à l'une de celles dont le carré tend vers a, on dira que sa limite est égale à $\sqrt{a}$.

La relation

$$\sqrt{a}\sqrt{b}=\sqrt{ab}$$

signifie que α, β, γ étant des variables commensurables quelconques, dont les carrés tendent vers a, b, ab, la différence $\alpha\beta-\gamma$ tend vers zéro.

La notation $\sqrt{\sqrt{a}}$ rappellera qu'il existe des variables progressives toutes équivalentes entre elles, et telles que leurs carrés soient équivalents à toute variable dont le propre carré converge vers a. L'équation

$$\sqrt{\sqrt{a}}=\sqrt[4]{a}$$

exprime que les variables dont il s'agit sont aussi équivalentes à toute autre dont la quatrième puissance converge vers a.

2° Considérons la fonction entière :

$$u_{m,\mu}=1+\frac{x_m}{1}+\frac{x_m^2}{1.2}+\ldots+\frac{x_m^\mu}{1.2\ldots\mu},$$

où x_m désigne une variable progressive convergente. On peut prouver que $u_{m,\mu}$ est aussi une variable convergente; qu'elle reste équivalente à elle-même quand m, μ augmentent à l'infini de toutes les manières possibles, et aussi quand on substitue à x_m une variable équivalente quelconque.

On peut encore prouver que le produit $u_{m,\mu} \times v_{n,\nu}$, où $v_{n,\nu}$ désigne une quantité progressive analogue.

$$1 + \frac{y_n}{1} + \frac{y_n^2}{1 \cdot 2} + \cdots + \frac{y_n^\nu}{1 \cdot 2 \cdots \nu},$$

demeure équivalent à la variable :

$$1 + \frac{x_m + y_n}{1} + \frac{(x_m + y_n)^2}{1 \cdot 2} + \cdots + \frac{(x_m + y_n)^\varpi}{1 \cdot 2 \cdots \varpi}$$

pour toutes les manières possibles de faire croître à l'infini les nombres m, μ, n, ν, ϖ.

Tous ces résultats s'expriment beaucoup plus simplement en feignant que x_m, y_n convergent vers des limites x, y, que $u_{m,\mu}$, $v_{n,\nu}$ tendent de même vers d'autres limites qu'on désignera par e^x, e^y, et en écrivant :

$$e^x\, e^y = e^{x+y}.$$

Dans la notation e^x, on doit considérer les signes $e^{(\ )}$ et x comme rappelant l'un la manière dont $u_{m,\mu}$ se forme avec μ, et x à quoi doit être équivalente la variable progressive sur laquelle il faut opérer pour obtenir $u_{m,\mu}$.

3° Le problème inverse, consistant à trouver pour x_m une variable convergente qui fasse tendre la fonction

$$1 + \frac{x_m}{1} + \frac{x_m^2}{1 \cdot 2} + \cdots + \frac{x_m^\mu}{1 \cdot 2 \cdots \mu}$$

vers un nombre donné u, ou qui la rende équivalente à une certaine variable convergente u_n, est toujours possible. Il admet pour solution une infinité de variables toutes équivalentes. C'est ce qui conduit à nommer logarithme de u ou de la limite fictive du u_n la limite fictive ou réelle de x_m.

Sous l'équation

$$l(uv) = l(u) + l(v),$$

on peut voir, comme dans l'exemple précédent, une certaine relation entre des nombres variables tous commensurables.
