LA METHODE DES FLUXIONS, ET DES SUITES INFINIES.

Par M. le Chevalier NEWTON.

Traduit en françois par m.r de Buffon intend.t du jardin du Roy.

A PARIS,
Chez DE BURE l'aîné, Libraire, Quay des Augustins, à Saint Paul.

M. DCC XL.

Dès les premiers pas qu'on fait en Géometrie, on trouve l'infini, & dès les tems les plus reculés les Géometres l'ont entrevû, la Quadrature de la Parabole & le Traité *de Numero Arenæ* d'Archimede prouvent que ce grand homme avoit des idées de l'infini, & même des idées telles qu'on les doit avoir; on a étendu ces idées, on les a maniées de différentes façons, enfin on a trouvé l'art d'y appliquer le calcul : mais le fond de la Metaphysique de l'Infini n'a point changé, & ce n'est que dans ces derniers tems que quelques Géometres nous ont donné sur l'infini des vûës différentes de celles des Anciens, & si éloignées de la nature des choses, qu'on les a méconnues jusque dans les ouvrages de ces grands hommes ; & de là sont venues toutes les oppositions, toutes les contradictions qu'on a fait & qu'on fait encore souffrir au calcul infinitesimal ; de là sont venues les disputes entre les Géometres sur la façon de prendre ce calcul, & sur les principes dont il dérive ; on a été étonné des prodiges que ce calcul opéroit, cet étonnement a été suivi de confusion ; on a cru qne l'infini produisoit toutes ces merveilles ; on s'est imaginé que la connoiſſance de cet infini avoit été refuſée à tous les ſiécles & réſervée pour le nôtre ; enfin on a bâti ſur cela des ſyſtêmes qui n'ont ſervi qu'à embrouiller les Faits & obſcurcir les idées. Avant que d'aller plus loin diſons donc deux mots de la nature de cet infini, qui en éclairant les hommes ſemble les avoir ébloui.

Nous avons des idées nettes de la grandeur, nous voyons que les choſes en général peuvent être augmentées ou diminuées, & l'idée d'une choſe devenuë plus grande ou plus petite eſt une idée qui nous eſt auſſi préſente & auſſi familiere que celle de la choſe même ; une choſe quelconque nous étant donc préſentée ou étant ſeulement imaginée, nous voyons qu'il eſt poſſible de l'augmenter ou de la diminuer ; rien n'arrête, rien ne détruit cette poſſibilité, on peut toujours concevoir la moitié de la plus petite choſe imaginable, & le double de la plus grande choſe ; on peut même concevoir qu'elle peut devenir cent fois, mille fois, cent mille fois plus petite ou plus grande ; & c'eſt cette poſſibilité d'augmentation ou de diminution ſans bornes en quoi conſiſte la véritable idée qu'on doit avoir de l'infini ; cette idée nous vient de l'idée du fini, une choſe finie eſt une choſe qui a des termes, des bornes ; une choſe infinie n'eſt que cette même choſe finie à laquelle nous ôtons ces termes & ces bornes ; ainſi l'idée de l'infini n'eſt qu'une idée de privation, & n'a point d'objet réel. Ce n'eſt pas ici le lieu de faire voir que l'eſpace,

le tems, la durée, ne ſont pas des Infinis réels ; il nous ſuffira de prouver qu'il n'y a point de nombre actuellement Infini ou infiniment petit, ou plus grand ou plus petit qu'un Infini, &c.

Le Nombre n'eſt qu'un aſſemblage d'unités de même eſpece ; l'unité n'eſt point un Nombre, l'unité déſigne une ſeule choſe en général ; mais le premier Nombre 2 marque non-ſeulement deux choſes, mais encore deux choſes ſemblables, deux choſes de même eſpece ; il en eſt de même de tous les autres Nombres : Mais ces Nombres ne ſont que des repréſentations, & n'exiſtent jamais indépendamment des choſes qu'ils repréſentent ; les caractéres qui les déſignent ne leur donnent point de réalité, il leur faut un ſujet, ou plûtôt, un aſſemblage de ſujets à repréſenter pour que leur exiſtence ſoit poſſible ; j'entends leur exiſtence intelligible, car ils n'en peuvent avoir de réelle ; or un aſſemblage d'unités ou de ſujets ne peut jamais être que fini, c'eſt-à-dire, on pourra toujours aſſigner les parties dont il eſt compoſé, par conſéquent le Nombre ne peut être Infini quelqu'augmentation qu'on lui donne.

Mais dira-t'on le dernier Terme de la ſuite naturelle 1, 2, 3, 4, &c. n'eſt-il pas Infini ? n'y a-t-il pas des derniers Termes d'autres ſuites encore plus Infinis que le dernier Terme de la ſuite naturelle ? Il paroît que les Nombres doivent à la fin devenir Infinis, puiſqu'ils ſont toujours ſuſceptibles d'augmentation ; à cela je réponds que cette augmentation dont ils ſont ſuſceptibles, prouve évidemment qu'ils ne peuvent être Infinis; je dis de plus que dans ces ſuites il n'y a point de derniers Termes, que même leur ſuppoſer un dernier Terme, c'eſt détruire l'eſſence de la ſuite qui conſiſte dans la ſucceſſion des Termes qui peuvent être ſuivis d'autres Termes, & ces autres Termes encore d'autres, mais qui tous ſont de même nature que les précédens, c'eſt-à-dire, tous finis, tous compoſés d'unités; ainſi lorſqu'on ſuppoſe qu'une ſuite a un dernier Terme, & que ce dernier Terme eſt un nombre infini, on va contre la définition du nombre & contre la loi générale des ſuites.

La plûpart de nos erreurs en Metaphyſique viennent de la réalité que nous donnons aux idées de privation, nous connoiſſons le fini, nous y voyons des propriétés réelles, nous l'en dépouillons, & en le conſidérant après ce dépouillement, nous ne le reconnoiſſons plus, & nous croyons avoir créé un être nouveau, tandis que nous n'avons fait que détruire quelque partie de celui qui nous étoit anciennement connu,

On ne doit donc conſidérer l'Infini ſoit en petit, ſoit en grand, que comme une privation, un retranchement à l'idée du fini, dont on peut ſe ſervir comme d'une ſuppoſition qui dans quelques cas peut aider à ſimplifier les idées, & doit generaliſer leurs réſultats dans la pratique des Sciences; ainſi tout l'art ſe réduit à tirer parti de cette ſuppoſition, en

tâchant de l'appliquer aux ſujets que l'on conſidére. Tout le mérite eſt donc dans l'application, en un mot dans l'emploi qu'on en fait.

Avant que Deſcartes eût appliqué l'Algebre à la Géometrie, les principes & la Metaphyſique de la Géometrie étoient bien connus & bien certains; cependant cette application a beaucoup augmenté nos connoiſſances Géometriques, & s'eſt étenduë ſur toutes les opérations de cette ſcience; de même l'Infini étoit connu, & la Metaphyſique de l'Infini étoit familiere aux Anciens; mais l'application qu'on a faite de nos jours du Calcul à cet Infini, nous a mis au-deſſus d'eux & nous a valu toutes les nouvelles découvertes.

LA METHODE DES FLUXIONS.

I. J'AI observé que les Géometres modernes ont la plufpart négligé la Synthefe des anciens, & qu'ils fe font appliqués principalement à cultiver l'Analyfe; cette Methode les a mis en état de furmonter tant d'obftacles, qu'ils ont épuifé toutes les Spéculations de la Géometrie, à l'exception de la Quadrature des Courbes & de quelques autres matieres femblables, qui ne font point encore difcutées; cela joint à l'envie de faire plaifir aux jeunes Géometres, m'a engagé à compofer le Traité fuivant, dans lequel j'ai tâché de reculer encore les limites de l'Analyfe, & de perfectionner la fcience des Lignes Courbes.

II. La grande conformité qui fe trouve dans les Opérations litterales de l'Algebre, & dans les Opérations numeriques de l'Arithmetique; cette reffemblance ou analogie, qui feroit parfaite, fi les Caracteres n'étoient pas differens, les premiers étant généraux & indéfinis, & les autres particuliers & définis, devoit naturellement nous conduire à en faire ufage; & je ne puis qu'être étonné de ce que personne, à moins que vous ne vouliez excepter M. *Mercator*, *de Quadratura Hyperbolæ*, n'a songé à appliquer à l'Algebre la doctrine des Fractions Decimales, puisque cette application ouvre la route pour arriver à des découvertes plus importantes & plus difficiles. Mais, puisqu'en effet cette doctrine reduite en especes doit avoir avec l'Algebre la même relation que la doctrine des Nombres Decimaux se trouve avoir avec l'Arithmetique ordinaire, il suffit de sçavoir l'Arithmetique & l'Algebre, & d'observer la correspondance qui doit être entre les Fractions Decimales & les Termes Algebriques continués à l'infini, pour faire les Opérations de l'Addition, Soustraction, Multiplication, Division & Extraction de Racines dans cette nouvelle façon de calcul. Car comme dans les Nombres les places à droite diminuent en raison Decimale, ou Soudecuple, il en est respectivement de même dans les especes, lorsque les Termes sont disposés en Progression uniforme continuée à l'infini, suivant l'ordre des dimensions d'un Nominateur ou Dénominateur quelconque; & comme les Fractions Decimales ont l'avantage de transformer en quelque façon toutes les Fractions ordinaires & tous les Radicaux en Nombres entiers, de sorte que, lorsque ces Fractions & ces Nombres sourds sont reduits en Decimales, ils peuvent être traités comme des Nombres entiers; de même les suites infinies ont l'avantage de reduire à la classe des Quantités simples toutes les especes de Termes compliqués, tels que les Fractions dont les Dénominateurs sont des Quantités complexes, les Racines des Quantités composées ou des Equations affectées, & d'autres semblables; c'est-à-dire qu'elles donnent la commodité de pouvoir les exprimer par une suite infinie de Fractions, dont les Numerateurs & les Dénominateurs sont des Termes simples, ce qui applanit des difficultés, qui sous la forme ordinaire, auroient paru insurmontables. Je vais donc commencer par faire voir comment ces Reductions doivent se faire, ou ce qui est la même chose, comment une Quantité composée quelconque peut être reduite à des Termes simples, dans les cas sur-tout où la Methode de calculer ne se présente pas d'abord; j'appliquerai ensuite cette Analyse à la solution des Problêmes.

III. La Reduction par la Division & par l'Extraction des Racines se concevra clairement par les exemples suivans, en comparant les façons d'opérer en Nombres & en Especes.

Exemples de Reduction par la Division.

IV. La Fraction $\frac{aa}{b+x}$ étant proposée, Divises aa par $b+x$ de la maniere qui suit.

$$b+x)\,a^2+0\left(\frac{aa}{b}-\frac{aax}{b^2}+\frac{aax^2}{b^3}-\frac{aax^3}{b^4}+\frac{aax^4}{b^5},\ \text{\&c.}\right.$$

$$\begin{array}{l}
aa+\frac{aax}{b} \\
\hline
0-\frac{aax}{b}+0 \\
-\frac{aax}{b}-\frac{aax^2}{b^2} \\
\hline
\qquad 0+\frac{a^2x^2}{b^2}+0 \\
\qquad +\frac{a^2x^2}{b^2}+\frac{a^2x^3}{b^3} \\
\hline
\qquad\qquad 0-\frac{a^2x^3}{b^3}+0 \\
\qquad\qquad -\frac{a^2x^3}{b^3}-\frac{a^2x^4}{b^4} \\
\hline
\qquad\qquad\qquad 0+\frac{a^2x^4}{b^4},\ \text{\&c.}
\end{array}$$

Le Quotient est donc $\frac{aa}{b}-\frac{a^2x}{b^2}+\frac{a^2x^2}{b^3}-\frac{a^2x^3}{b^4}+\frac{a^2x^4}{b^5}$, &c. laquelle suite étant continuée à l'infini $=\frac{aa}{b+x}$. ou si l'on fait x le premier Terme du Diviseur de cette façon, $x+b\,(\,aa+0$, alors le Quotient sera $\frac{aa}{x}-\frac{aab}{x^2}+\frac{aab^2}{x^3}-\frac{aab^3}{x^4}$, &c. ce que l'on trouvera par la même maniere que ci-dessus.

V. De même la Fraction $\frac{1}{1+xx}$, se reduira à $1-x^2+x^4-x^6+x^8$, &c. ou bien à $x^{-2}-x^{-4}+x^{-6}-x^{-8}$, &c.

VI. Et la Fraction $\frac{2x^{\frac{1}{2}}-x^{\frac{3}{2}}}{1+x^{\frac{1}{2}}-3x}$, se reduira à $2x^{\frac{1}{2}}-2x+7x^{\frac{3}{2}}-13x^2+34x^{\frac{5}{2}}$, &c.

VII. Il convient ici d'obſerver que je me ſers de x^{-1}, x^{-2}, x^{-3}, x^{-4}, &c. au lieu de $\frac{1}{x}$, $\frac{1}{x^2}$, $\frac{1}{x^3}$, $\frac{1}{x^4}$, &c. de $x^{\frac{1}{2}}$, $x^{\frac{3}{2}}$, $x^{\frac{5}{2}}$, $x^{\frac{1}{3}}$, $x^{\frac{2}{3}}$, &c. au lieu de $\sqrt{x}$, $\sqrt{x^3}$, $\sqrt{x^5}$, $\sqrt[3]{x}$, $\sqrt[3]{x^2}$, & de $x^{-\frac{1}{2}}$, $x^{-\frac{2}{3}}$, $x^{-\frac{1}{4}}$, &c. au lieu de $\frac{1}{\sqrt{x}}$, $\frac{1}{\sqrt[3]{x^2}}$, $\frac{1}{\sqrt[4]{x}}$, &c. Et cela par regle d'Analogie, comme on peut le concevoir par des Progreſſions Géometriques ſemblables à celles-ci, x^3, $x^{\frac{5}{2}}$, x^2, $x^{\frac{3}{2}}$, x, x^0 ou 1, $x^{-\frac{1}{2}}$, x^{-1}, $x^{-\frac{3}{2}}$, x^{-2}, &c.

VIII. Ainſi au lieu de $\frac{aa}{x} - \frac{aab}{x^2} + \frac{aab^2}{x^3}$, &c. on peut écrire $aax^{-1} - aabx^{-2} + aab^2x^{-3}$, &c.

IX. Et au lieu de $\sqrt{aa-xx}$, on peut écrire $\overline{aa-xx}|^{\frac{1}{2}}$, & $\overline{aa-xx}|^{2}$, au lieu du Quarré de $aa-xx$, & $\overline{\frac{abb-y^3}{by+yy}}\Big|^{\frac{1}{3}}$ au lieu de $\sqrt[3]{\frac{ab^2-y^3}{by+yy}}$, & ainſi des autres.

X. Ainſi il convient aſſez de diſtinguer les Puiſſances en Affirmatives, Négatives ; Entieres & Rompuës.

[...]

L V. En voilà tout autant qu'il en faut de dit sur ces Methodes de calcul, dont je ferai un frequent usage dans la suite. Reste maintenant à donner quelques essais de Problêmes, sur-tout de ceux que nous présente la nature des Courbes, & cela pour mettre l'Art Analitique dans un plus grand jour. Et d'abord j'observerai que toutes leurs difficultés peuvent se reduire à ces deux Problêmes seulement que je vais proposer sur un espace décrit par un mouvement local retardé ou acceleré d'une façon quelconque.

L VI. 1. *La longueur de l'Espace décrit étant continuellement donnée, trouver la vitesse du Mouvement à un tems donné quelconque.*

L VII. 2. *La vitesse du Mouvement étant continuellement donnée, trouver la longueur de l'Espace décrit à un tems donné quelconque.*

L VIII. Ainsi dans l'Equation $xx = y$, si y représente la lon-

gueur de l'Espace décrit à un tems quelconque, lequel tems un autre Espace x en augmentant d'une vitesse uniforme $\dot{x}$ mésure & représente comme décrit, alors $2\dot{x}x$ représentera la vitesse avec laquelle dans le même instant l'Espace y viendra à être décrit *& vice versa*; & c'est de-là que j'ai dans ce qui suit consideré les Quantités comme produites par une augmentation continuelle à la maniere de l'Espace que décrit un corps en mouvement.

L IX. Mais comme nous n'avons pas besoin de considerer ici le tems autrement que comme exprimé & mésuré par un mouvement local uniforme, & qu'outre cela nous ne pouvons jamais comparer ensemble que des Quantités de même genre, non-plus que leurs vitesses d'accroissement & de diminution; je n'aurai dans ce qui suit aucun égard au tems consideré proprement comme tel; mais je supposerai que l'une des Quantités proposées de même genre doit augmenter par une Fluxion uniforme, à laquelle Quantité je rapporterai tout le reste comme si c'étoit au tems; donc par Analogie cette quantité peut avec raison recevoir le nom de tems; ainsi quand dans la suite pour donner des idées plus claires & plus distinctes, je me servirai du mot *Tems*, je n'entends jamais le tems proprement pris comme tel, mais seulement une autre Quantité par l'augmentation ou Fluxion de laquelle le tems peut être expprimé & mésuré.

L X. J'appellerai *Quantités Fluentes*, ou simplement ***Fluentes*** ces Quantités que je considere comme augmentées graduellement & indefiniment, je les représenterai par les dernieres Lettres de l'Alphabet v, x, y & z pour les distinguer des autres quantites qui dans les Equations sont considerées comme connuës & déterminées qu'on représente par les Lettres initiales a, b, c, &c. & je représenterai par les mêmes dernieres Lettres surmontées d'un point $\dot{v}$, $\dot{x}$, $\dot{y}$ & $\dot{z}$ les vitesses dont les Fluentes sont augmentées par le mouvement qui les produit, & que par conséquent on peut appeller ***Fluxions***. Ainsi pour la Vitesse ou Fluxion de v je mettrai $\dot{v}$, & pour les vitesses de x, y, z je mettrai $\dot{x}$, $\dot{y}$, $\dot{z}$ respectivement.

L XI. Ces choses étant ainsi préposées, je vais entrer en matiere & donner d'abord la solution des deux Problêmes que je viens de proposer.

PROBLEME I.

Etant donnée la Relation des Quantités Fluentes, trouver la Relation de leurs Fluxions.

SOLUTION.

I. DISPOSEZ l'Equation par laquelle la Relation donnée est exprimée suivant les Dimensions de l'une de ses Quantités Fluentes x par exemple, & multipliez ses Termes par une Progression Arithmetique quelconque, & ensuite par $\frac{\dot{x}}{x}$ faites cette Opération séparément pour chacune des Quantités Fluentes ; après quoi égalez à zero la somme de tous les produits, & vous aurez l'Equation cherchée.

II. EXEMPLE I. Si la Relation des Quantités Fluentes x & y est $x^3 - ax^2 + axy - y^3 = 0$, disposez d'abord les Termes suivant x, & ensuite suivant y, & multipliez-les comme vous voyez.

Multipliez	x^3	$-ax^2$	$+axy$	$-y^3$	$-y^3$	$+axy$	$\begin{matrix}-ax^2\\+x^3\end{matrix}$
par	$\frac{3\dot{x}}{x}$.	$\frac{2\dot{x}}{x}$.	$\frac{\dot{x}}{x}$.	0	$\frac{3\dot{y}}{y}$.	$\frac{\dot{y}}{y}$.	0
Vous aurez	$3\dot{x}x^2$	$-2a\dot{x}x$	$+a\dot{x}y$	*	$-3\dot{y}y^2$	$+a\dot{y}x$	*

la somme des produits est $3\dot{x}x^2 - 2ax\dot{x} + a\dot{x}y - 3\dot{y}y^2 + a\dot{y}x$, qui étant égalée à zero, donne la Relation des Fluxions $\dot{x}$ & $\dot{y}$; car si vous donnez à volonté une valeur à x, l'Equation $x^3 - ax^2 + axy - y^3 = 0$, donnera la valeur de y ; ce qui étant déterminé, l'on aura $\dot{x} : \dot{y} :: 3y^2 - ax : 3x^2 - 2ax + ay$.