Fluxions et

Lettre sur deux inventions et les non-droits des « seconds inventeurs »

A Madame la Marquise N***
Au fond de l'impasse de la Perle à Paris

De Londres, le 14 novembre 1746

Madame, un libraire d'Oxford Street a enfin pu me trouver un exemplaire de la première édition (1713) du fameux *Commercium epistolicum D. Johannis Collins, et aliorum de analysi promota* [1], qu'il m'a d'ailleurs vendu fort cher. Mais, comme vous me dites dans votre dernière, ne pas être au courant de cette fameuse dispute qui a défrayé la chronique il n'y a pas si longtemps, en voici donc le récit.

Imaginez **Isaac Newton**, jeune homme de 18 ans venu de son Lincolnshire natal, solitaire et ombrageux, au milieu de la foule bruyante et festive des étudiants de Trinity College, à Cambridge, ne respectant ni règles ni programmes. Newton, dont on peut suivre les lectures à travers les notes qu'il a couchées dans ses *notebooks*, ne s'est pas davantage astreint au *curriculum* classique (Aristote), mais a commencé son initiation aux mathématiques, vers le printemps ou l'été 1664, en plongeant directement dans la *Géométrie* de Descartes (à savoir la seconde édition latine avec les additions et commentaires de Frans van Schooten, comprenant la méthode des tangentes de Hudde). Newton sut assimiler, dans les années 1664-1666, les mathématiques de tout un siècle. Au bout de six mois d'initiation, ses notes de lecture se transformèrent imperceptiblement en recherches originales. En se concentrant pendant un an et demi entièrement sur les mathématiques, en y pensant continuellement (comme il avait coutume de dire), Newton arriva à une méthode nouvelle, la méthode des fluxions, qui lui permit de résoudre de manière générale les problèmes posés par ses prédécesseurs, et notamment le problème des tangentes et celui de la quadrature des courbes. On savait déjà déterminer les tangentes à de nombreuses courbes, celles notamment dont l'équation ne comportait pas de racines. On savait également calculer, par une méthode plongeant ses racines dans Archimède, l'aire de surfaces comprises sous certaines courbes, assimilée approximativement à la somme des aires rectangulaires inscrites.

Je vais d'abord, Madame, vous expo-

1 – Sur le commerce épistolaire de M. Jean Collins et d'autres sur l'analyse avancée.

différences

En novembre 1746, Leibniz meurt au point culminant de la querelle qui l'oppose à Newton. L'un et l'autre ont travaillé à la description mathématique de courbes : le premier par la méthode des différences, le second par celle des fluxions. Lequel des deux a véritablement inventé le calcul intégral ? La réponse dans une lettre imaginée à votre intention...

PAR JEANNE PEIFFER

« *Il faut... qu'il renonce au droit qu'il prétend avoir à la méthode différentielle de Newton, en tant que second inventeur.* » Voilà ce qu'exige Newton de Leibniz, en 1715, dans le journal officiel de la Royal Society (ci-dessus).

ser de manière brève et synthétique en quoi consiste la méthode des fluxions, avant de vous décrire comment s'est développée la concurrence puis l'âpre rivalité avec Leibniz.

Les plus anciens résultats mathématiques de Newton, dans le prolongement de l'*Arithmetica infinitorum* de John Wallis, portent sur les séries. Dès l'hiver 1664-1665, il obtint la série dite du binôme. Vous la connaissez bien, Madame, pour le cas n = 2 en tout cas, où elle s'écrit : $(a + x)^2 = a^2 + 2ax + x^2$.

Newton partait lui du cas général, celui de la série [2]:

$$(a + x)^n = a^n x^0 + \frac{n}{1} a^{n-1}x^1 + \frac{n(n-1)}{1.2} a^{n-2}x^2 + \frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3} + \ldots + a^0 x^n,$$

valable pour n entier et positif.

Or, la validité de cette série peut être étendue à des puissances fractionnaires r = p/q, mais, dans ce cas, l'expression de droite sera une série infinie :

$$(a + x)^r = a^r + \frac{r}{1} a^{r-1}x^1 + \frac{r(r-1)}{1.2} a^{r-2}x^2 + \ldots$$

Cette formule permet de développer en séries de puissances des expressions comme :

$(1 + x)^{-1} = \frac{1}{1+x}$, ou $(1 + x)^{1/2} = \sqrt{1+x}$,

ou encore $(1-x^2)^{1/2} = \sqrt{1-x^2}$

Entre les mains de Newton, le développement en série devint rapidement un outil très puissant, permettant de décomposer les expressions analytiques de courbes – même transcendantes, ne pouvant donc être décrites par des équations algébriques, c'est-à-dire des polynômes, comme les exemples ci-dessus – en des sommes (même si elles étaient infinies) de termes de la forme ax^n.

La quadrature de toutes sortes de courbes pouvait alors être obtenue en développant leur équation en série et en appliquant la relation, que nous écririons aujourd'hui :

$$\int x^n dx = \frac{1}{n+1} x^{n+1}$$

et connue sous diverses formes depuis les années 1660, aux différents termes de la série.

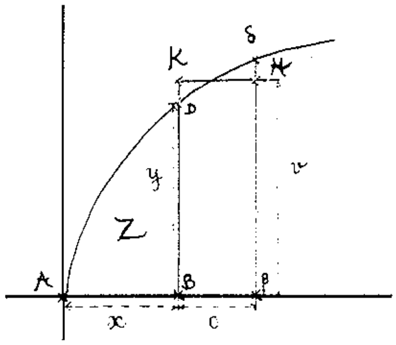
Dans le *De analsi per æquationes numero terminorum infinitas* [3], communiqué en 1669 à quelques mathématiciens anglais et publié depuis, Newton énonce (règle 1) :

Si $ax^{m/n} = y$, alors $\frac{na}{m+n} x^{m+n/n}$ vaut l'aire ABD.

Il explique le procédé, qui l'a amené à ce résultat et qui est d'ailleurs tout à fait général, sur l'exemple de la fonction qui à tout x associe :

$$f(x) = \frac{2}{3} x^{3/2}$$

Je vous ai décrit cette fonction dans ma première annexe ; elle est illustrée par la **figure ci-dessous**.



Vous voyez, Madame, que, dans cet exemple, Newton considère l'aire ABD comprise entre la courbe AD et l'axe des abscisses, ainsi que l'accroissement *ov* de cette aire lorsque le point B s'est déplacé d'une quantité infiniment petite *o* en β. Le noyau de sa méthode est la substitution, dans l'équation, de $x + o$ à x et de $z + ov$ à z, o et ov étant des accroissements infinitésimaux. Il a de fait calculé le taux de variation instantanée de l'aire. Si celle-ci s'exprime par $z = \frac{2}{3} x^{3/2}$, le taux de variation sera de : $y = x^{1/2}$, c'est-à-dire l'ordonnée de la courbe.

Vous voyez immédiatement que, pour nous, ce procédé consiste essentiellement dans le calcul de la dérivée[4] (ici y) d'une fonction algébrique z de x.. Comme z est l'aire comprise sous la courbe $y(x)$, Newton peut, par ce procédé – en calculant y pour toutes sortes de z algébriques – trouver des courbes susceptibles d'être quarrées (ou inté-

2 - Si on remplace n par 2 dans la série, le troisième terme vaut a^0x^2. Il faut donc arrêter la série à ce terme.

3 - De l'analyse par les séries infinies.

4 - La notion de dérivée n'a été formulée ainsi qu'en 1821 mais nous l'introduisons afin de clarifier notre propos.

Annexe 1

L'aire curviligne ABD de notre exemple est donnée par la formule $z = (\frac{2}{3})x^{3/2}$.

Lorsqu'elle s'accroît d'une petite aire curviligne BDδβ approximativement égale à un petit rectangle BKHβ = *ov*, elle augmente de la valeur *ov*.
On a alors : $(z+ov) = (\frac{2}{3})(x+o)^{3/2}$.

En élevant les deux termes de cette égalité au carré, on obtient :
$(z+ov)^2 = (\frac{4}{9})(x+o)^3$.

D'où il vient, en développant (je vous rappelle que $(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$) :
$z^2 + 2zov + o^2v^2 = (\frac{4}{9})(x^3 + 3x^2o + 3xo^2 + o^3)$.

Ou encore, en isolant les termes sans *o*,
$z^2 + (2zov + o^2v^2) = (\frac{4}{9})x^3 + (\frac{4}{9})(3x^2o + 3xo^2 + o^3)$.

Comme $z^2 = (\frac{4}{9})x^3$,

on peut simplifier ces termes,
$2zov + o^2v^2 = (\frac{4}{9})(3x^2o + 3xo^2 + o^3)$,

et mettre *o* en facteur,
$o(2zv + ov^2) = (\frac{4}{9})o(3x^2 + 3xo + o^2)$

afin de simplifier par cette quantité,
$2zv + ov^2 = (\frac{4}{9})(3x^2 + 3xo + o^2)$.

Si on suppose que l'accroissement de l'aire est minimale, donc que Bβ est infiniment petit, deux conséquences apparaissent. Tout d'abord, *o* tend vers 0 et tous les termes contenant cette mesure s'évanouissent : ov^2, $3xo$ et o^2 tendent aussi vers 0. Ensuite, comme la figure le suggère, *v* devient égal à *y*. On obtient :
$2zy = \frac{4}{3} x^2$.

En remplaçant *z* par sa valeur donnée au départ, $(\frac{2}{3})x^{3/2}$,

on obtient :
$2(\frac{2}{3})x^{3/2}y = \frac{4}{3} x^2$, soit en simplifiant par $\frac{4}{3}$

$y = \frac{x^2}{x^{3/2}} = x^{2-3/2}$. Ce qui donne $y = x^{1/2}$

ou encore $y = \sqrt{x}$
La mesure *y*, donnée pour toutes les abscisses *x* permet de définir la fonction qui donne les points de la courbe AD.

grées). Il a implicitement reconnu le lien de réciprocité entre dérivation et intégration. Newton ne calcule donc pas les aires en sommant comme c'était le cas dans la tradition archimédienne du XVII[e] siècle. Il intègre, au contraire, en inversant l'opération de dérivation !

Plus tard, Newton reformula sa méthode en termes de « fluentes » et de « fluxions ». Dans l'exemple ci-dessus, il a déduit l'ordonnée de l'aire « *en considérant l'aire comme une quantité qui croît ou qui s'augmente par un flux continuel* », c'est-à-dire une quantité qui change continuellement par rapport à une variable, mais, plus précisément dans le cadre de cette image, par rapport au temps. Il conçoit la courbe comme engendrée par le mouvement d'un point, D sur ma figure, qui s'effectue avec une vitesse déterminée. L'abscisse x, l'ordonnée y, la quadrature z ou toute autre variable définie par rapport à la courbe fluent dans le temps, c'est-à-dire croissent ou décroissent. Leurs vitesses sont les « fluxions » des « fluentes » x, y, z, etc. La fluxion de x est ainsi le rapport de l'accroissement (ou de la diminution) momentanée de x au moment o de temps.

Newton parle de quantités qu'il considère « *comme augmentées graduellement et indéfiniment* » et qu'il désigne à l'aide des dernières lettres de l'alphabet v, x, y et z. Il représente « *par les mêmes dernières lettres surmontées d'un point* $\dot{v}$, $\dot{x}$, $\dot{y}$, & $\dot{z}$, *les vitesses dont les fluentes sont augmentées par le mouvement qui les produit, et que par conséquent on peut appeler fluxions* ». Les accroissements des variables peuvent donc être exprimés en termes de fluxions : si o est un élément infinitésimal de temps, un moment, les accroissements des fluentes x, y, z,... seront $\dot{x}o$, $\dot{y}o$, $\dot{z}o$, etc.. Le rapport de $\dot{y}$ à $\dot{x}$ peut alors être facilement déterminé. Vous en serez convaincue lorsque vous aurez examiné l'exemple que je vous propose dans ma deuxième annexe.

Annexe 2

Pour illustrer sa méthode de calcul du rapport des fluxions $\dot{y}/\dot{x}$, prenons pour exemple la courbe d'équation $x^3 - ax^2 + axy - y^3 = 0$. Afin de faire varier les fluentes x et y en suivant son tracé on substitue $(x + \dot{x}o)$ à x et $(y + \dot{y}o)$ à y. En remplaçant dans notre équation, on aura :

$$(x+\dot{x}o)^3 - a(x+\dot{x}o)^2 + a(x+\dot{x}o)(y+\dot{y}o) - (y+\dot{y}o)^3 = 0$$

Après développement, on obtient :

$$x^3 + 3(\dot{x}o)x^2 + 3(\dot{x}o)^2x + (\dot{x}o)^3 - a(x^2 + 2x(\dot{x}o) + (\dot{x}o)^2) + a(xy + x(\dot{y}o)$$
$$+ (\dot{x}o)y + (\dot{x}o)(\dot{y}o)) - (y^3 + 3y^2(\dot{y}o) + 3y(\dot{y}o)^2 + (\dot{y}o)^3) = 0.$$

Soit encore :

$$x^3 + 3\dot{x}ox^2 + 3\dot{x}^2o^2x + \dot{x}^3o^3 - (ax^2 + 2ax\dot{x}o + a\dot{x}^2o^2)$$
$$+ (axy + ax\dot{y}o + a\dot{x}oy + a\dot{x}\dot{y}o^2) - (y^3 + 3y^2\dot{y}o + 3y\dot{y}^2o^2 + \dot{y}^3o^3) = 0.$$

Et donc :

$$x^3 + 3\dot{x}ox^2 + 3\dot{x}^2o^2x + \dot{x}^3o^3 - ax^2 - 2ax\dot{x}o - a\dot{x}^2o^2$$
$$+ axy + ax\dot{y}o + a\dot{x}oy + a\dot{x}\dot{y}o^2 - y^3 - 3y^2\dot{y}o - 3y\dot{y}^2o^2 - \dot{y}^3o^3 = 0.$$

En regroupant les termes, il vient :

$$(x^3 - ax^2 + axy - y^3) + 3\dot{x}ox^2 + 3\dot{x}^2o^2x + \dot{x}^3o^3 - 2ax\dot{x}o - a\dot{x}^2o^2$$
$$+ ax\dot{y}o + a\dot{x}oy + a\dot{x}\dot{y}o^2 - 3y^2\dot{y}o - 3y\dot{y}^2o^2 - \dot{y}^3o^3 = 0.$$

Comme la parenthèse est l'équation de la courbe, elle est égale à 0 et il ne reste plus que des termes contenant o :

$$3\dot{x}ox^2 + 3\dot{x}^2o^2x + \dot{x}^3o^3 - 2ax\dot{x}o - a\dot{x}^2o^2 + ax\dot{y}o + a\dot{x}oy + a\dot{x}\dot{y}o^2 - 3y^2\dot{y}o - 3y\dot{y}^2o^2 - \dot{y}^3o^3 = 0$$

On peut donc mettre o en facteur et l'éliminer de notre équation en divisant de part et d'autre du signe "=". Il reste :

$$3\dot{x}x^2 + 3\dot{x}^2ox + \dot{x}^3o^2 - 2ax\dot{x} - a\dot{x}^2o + ax\dot{y} + a\dot{x}y + a\dot{x}\dot{y}o - 3y^2\dot{y} - 3y\dot{y}^2o - \dot{y}^3o^2 = 0.$$

Ou encore, en regroupant les termes sans o :

$$3\dot{x}x^2 - 2ax\dot{x} + ax\dot{y} + a\dot{x}y - 3y^2\dot{y} + (3\dot{x}^2ox + \dot{x}^3o^2 - a\dot{x}^2o + a\dot{x}\dot{y}o - 3y\dot{y}^2o - \dot{y}^3o^2) = 0$$

Comme o devient très petit lorsqu'on diminue l'accroissement, on peut écarter les termes de la parenthèse.

Il reste :

$$3\dot{x}x^2 - 2ax\dot{x} + ax\dot{y} + a\dot{x}y - 3y^2\dot{y} = 0.$$

En arrangeant cette équation pour en tirer le rapport de $\dot{y}$ à $\dot{x}$, on obtient successivement (mise en facteur de $\dot{x}$ et de $\dot{y}$) :

$$\dot{x}(3x^2 - 2ax + ay) + \dot{y}(ax - 3y^2) = 0$$

ou encore

$$\dot{x}(3x^2 - 2ax + ay) - \dot{y}(3y^2 - ax) = 0$$

d'où

$$\dot{x}(3x^2 - 2ax + ay) = \dot{y}(3y^2 - ax)$$

et

$$\frac{3x^2 - 2ax + ay}{3y^2 - ax} = \frac{\dot{y}}{\dot{x}}$$ **le rapport que l'on recherchait.**

Grâce à cet algorithme, Newton était capable de résoudre ce qu'il considéra comme les problèmes fondamentaux du calcul infinitésimal :

I. Étant donnée la relation des quantités fluentes, trouver la relation de leurs fluxions [= problème des « tangentes »].

II. Étant donnée la relation des fluxions, trouver celle des quantités fluentes [= problème inverse du précédent, dit des « quadratures »].

De ces idées mathématiques hautement originales, personne ne sut rien avant longtemps. Newton, susceptible et irritable, était, me dit-on, très réticent à rendre ces résultats publics. Constamment, il remettait les traités qu'il avait entrepris de rédiger sur l'établi, pour finalement les laisser inachevés. En octobre 1666, il fit un premier résumé de ses grandes découvertes des années 1664-1666, qui resta inédit. En 1669, il composa le *De analysi*, qui a connu une diffusion immédiate, mais très restreinte, et qui fut publié plus de 40 ans après sa rédaction, en 1711. Le *De methodis serierum et fluxionum*[5], fruit de l'hiver 1670/1671, dont vous connaissez peut-être la traduction française de Buffon, parut à titre posthume en 1736 et en anglais. Finalement, en annexe à *Opticks*, en 1704, Newton donna le *Tractatus de quadratura curvarum*[6], rédigé en 1691/92.

Rien, mais absolument rien de ces découvertes n'était connu, lorsque le philosophe allemand **Gottfried Wilhelm Leibniz** vint en 1672, à 26 ans, en pleine maturité intellectuelle, en mission diplomatique à Paris, au service de l'électeur de Mayence. Dès l'automne, il put rencontrer Christian Huygens, qui, comme vous ne l'ignorez pas, était le savant le plus connu de l'Académie royale des sciences. Il lui fit d'ailleurs découvrir toute l'étendue de son ignorance en mathématiques. Leibniz transforma son séjour parisien en 4 années d'études passionnées des mathématiques. Il emprunta, à la bibliothèque du roi, des livres qu'il survola et dont il sut tirer les théories les plus récentes pour se les approprier. Doué, paraît-il, d'une grande curiosité et d'un esprit vif, il ne s'attarda pas aux calculs qui l'ont toujours ennuyé. De cela vient, sans doute, son intérêt pour les machines à calculer. Il ne s'attachait qu'aux idées et aux méthodes. Son premier résultat original date d'ailleurs de l'hiver 1671-1672. Il concerne déjà la sommation des termes consécutifs d'une série de différences.

Sachez d'emblée, Madame, que pour celui qui a pu voir les papiers de Leibniz à Hanovre, comme c'est mon cas, une évidence s'impose : Leibniz a inventé son calcul indépendamment de Newton et a été le premier à le publier, même si Newton possédait neuf ans auparavant un calcul analogue. Vous verrez que, par son style, sa facture et les concepts mis en œuvre, le calcul des différences se distingue profondément de celui des fluxions.

Mais revenons à la sommation des séries de différences. On a évidemment :

$a_1 - a_1 + a_2 - a_2 + a_3 - a_3 + \ldots + a_n - a_n = 0$

si $0 < a_1 < a_2 < a_3 < \ldots < a_n$,

et $b_1 = a_2 - a_1$, $b_2 = a_3 - a_2, \ldots$,

$b_{n-1} = a_n - a_{n-1}$,

alors $a_1 + b_1 + b_2 + b_3 + \ldots + b_{n-1} - a_n = 0$

Et donc :

$b_1 + b_2 + b_3 + \ldots + b_{n-1} = a_n - a_1$

C'est-à-dire que la somme des termes consécutifs d'une série de différences est égale à la différence des deux termes extrêmes de la série associée.

Ainsi, Madame, dans l'exemple :

0 1 4 9 16 25…

1 3 5 7 9 … :

La première ligne correspond à la suite des carrés des nombres entiers, la deuxième à celle des nombres impairs. Vous obtiendrez le résultat suivant : la somme des nombres impairs consécutifs, **par exemple S = 1 + 3 + 5 + 7 + 9, peut s'exprimer comme une différence de deux carrés : S = 25 - 0 (autre exemple : S = 3 + 5 + 7 = 15 = 16 - 1).**

Leibniz a pris conscience que les séries de différences peuvent être sommées aisément. Ainsi, lorsque Huygens lui soumet la série

$$1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{6} + \frac{1}{10} - \frac{1}{15} + \ldots$$

dont les dénominateurs sont formés par les nombres dits « triangulaires » $\frac{r(r+1)}{2}$

Leibniz en réécrit les termes sous forme de différences :

$$\frac{2}{r(r+1)} = \frac{2}{r} - \frac{2}{r+1}$$

Il a pu noter immédiatement que :

$$\sum_{r=1}^{n} \frac{2}{r(r+1)} = 2 - \frac{2}{n+1}$$

Pour vous aider j'ai détaillé ce calcul dans ma troisième annexe. Mais consta-

5 – De la méthode des séries et des fluxions.
6 – Traité de la quadrature des courbes.

Annexe 3

La série de Huygens s'écrit comme la somme des inverses des nombres dits triangulaires, désignés par $\frac{r(r+1)}{2}$.

Les termes de la série sont donc : $\frac{2}{r(r+1)}$

Pour r = 1, on obtient $\frac{2}{1(1+1)} = \frac{2}{2} = 1$

Le premier terme commence avec r = 1. Cette série s'écrit bien de manière condensée :

$$\sum_{r=1}^{n} \frac{2}{r(r+1)}.$$

Si l'on ajoute un terme à la série des différences b, nous obtenons le résultat général :

$b_1 + b_2 + b_3 + \ldots + b_r + \ldots + b_n = a_{n+1} - a_1$

(avec $b_r = a_{r+1} - a_r$).

Pour écrire la série sous forme de différences, on peut poser 1 = (r+1) - r. On obtient alors :

$$\frac{2}{r(r+1)} = \frac{2[(r+1)-r]}{r(r+1)}$$

soit, en développant le numérateur :

$$\frac{2}{r(r+1)} = \frac{2(r+1)-2r}{r(r+1)}$$

ce qui donne :

$$\frac{2}{r(r+1)} = \frac{2(r+1)}{r(r+1)} - \frac{2r}{r(r+1)}$$

En simplifiant par r et (r+1), ceci devient :

$$\frac{2}{r(r+1)} = \frac{2}{r} - \frac{2}{r+1}$$

On n'obtient pas directement le terme général $b_r = a_{r+1} - a_r$, mais son opposé, $-b_r = a_r - a_{r+1}$. Il faut donc considérer la somme opposée à la série. On voit que :

$$\sum_{r=1}^{n} \frac{2}{r(r+1)} = -\sum_{r=1}^{n} -\frac{2}{r(r+1)}$$

Considérée comme une somme de différences, cette première somme, opposée à celle de Huygens, pouvait donc être calculée à l'aide de la règle énoncée par Leibniz : c'est la différence du dernier terme (pour r = n, donc $\frac{2}{n+1}$)

d'avec le premier (pour r = 1, soit $\frac{2}{1}$),

donc : $\frac{2}{n+1} - 2$

La série de Huygens s'écrit donc elle-même : $2 - \frac{2}{n+1}$.

tez tout de suite, par vous-même, le temps que cette écriture vous fait gagner. En effet, pour le cas simple où n = 5, la somme précédente s'écrit :

$$\sum_{r=1}^{5} \frac{2}{r(r+1)} = \frac{2}{2} + \frac{2}{2.3} + \frac{2}{3.4} + \frac{2}{4.5} + \frac{2}{5.6}$$

$$= 1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{6} + \frac{1}{10} + \frac{1}{15}$$

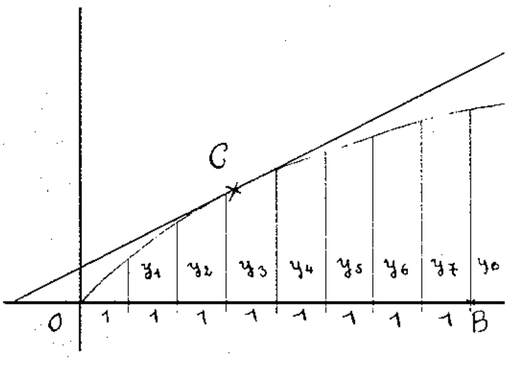
Elle peut se calculer à l'aide d'une simple soustraction :

$$2 - \frac{2}{5+1} = \frac{12}{6} - \frac{2}{6} = \frac{6}{3} - \frac{1}{3} = \frac{5}{3}$$

Sans cette unique opération, vous en seriez réduite à additionner les cinq nombres fractionnaires précédents. Si vos charmantes obligations vous laissent le loisir de pratiquer ces opérations, vous vérifierez aisément l'efficacité du procédé.

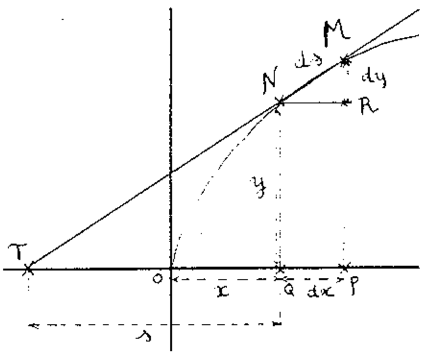
Lorsque le nombre de termes est infini, la somme de la série sera égale à 2 (puisque 2/(n + 1) tend vers 0 lorsque n tend vers l'infini).

Leibniz comprit ainsi que la formation de séries de différences et de séries de sommes sont des opérations inverses l'une de l'autre. Il ne tarda pas à appliquer cette idée à un contexte géométrique.



La **courbe ci-dessus** définit une suite d'ordonnées *y* équidistantes. Si leur distance est 1, la somme des *y* constitue une approximation de la quadrature de la courbe, et la différence de deux *y* successifs donne approximativement la pente de la tangente. Plus l'unité 1 est choisie petite, meilleure sera l'approximation. Si elle est infiniment petite, les approximations se transformeront en résultats exacts : la quadrature sera égale à la somme des ordonnées et la pente de la tangente égale à la différence des ordonnées.

Dans le *Traité des sinus du quart de cercle* de Pascal, Leibniz trouva une configuration géométrique, appelée à jouer un grand rôle dans sa méthode : celle du triangle, formé par une partie infiniment petite de la tangente à la courbe, et des portions infiniment petites de l'abscisse et de l'ordonnée. Pour Leibniz, ce triangle est caractéristique de la courbe donnée. Ses trois côtés infinitésimaux sont parfaitement déterminés par la similitude du triangle infiniment petit NMR au triangle TNQ, formé par la sous-tangente TQ, l'ordonnée QN et la longueur du segment TN de la tangente : (MR/NR) = (NQ/TQ). Le rapport (MR/NR) de deux infiniment petits a toujours une valeur finie, à savoir le rapport (NQ/TQ) de deux segments finis (voir **la figure ci-dessous**).



Vous serez sans doute émue, Madame, lorsque je vous dirai que j'ai pu voir, dans les papiers mêmes de Leibniz à Hanovre, le paquet de manuscrits qui correspond à la création proprement dite de l'algorithme leibnizien. Les 25, 26 et 29 octobre, puis les 1er et 11 novembre 1675, Leibniz, encore à Paris, étudie le problème de la quadrature des courbes et considère, comme je l'ai fait entendre ci-dessus, l'aire comprise sous la courbe comme la somme des ordonnées *y*. Il y utilise pour la somme une notation héritée du calcul des indivisibles de Cavalieri : omn. l (pour *omnia l*, signifiant toutes les lignes l). Brutalement, Leibniz y introduit à la place de omn. le signe intégrale ∫, un S de *Summa* stylisé, que vous connaissez bien, ∫*y* signifiant, pour Leibniz, la somme de tous les *y*. Immédiatement, il traduit de nombreuses propriétés géométriques concernant la quadrature des courbes en symboles et en formules. Conscient de la relation de réciprocité entre sommation et différentiation, il symbolisa l'inverse de ∫ par d, d'abord par (*x*/d) puis par d*x*, où d*x* est la différence infiniment petite de deux valeurs successives de *x*. La relation déduite du triangle caractéristique (d*s*, d*y*, d*x*) peut alors, dans cette nouvelle notation, s'écrire (d*y*/d*x*) = (y/s), où s est la sous-tangente, c'est-à-dire le segment découpé sur l'axe des abscisses par la tangente et le pied de l'ordonnée. Leibniz indique ensuite, en tâtonnant un peu, les règles de l'algorithme du calcul différentiel :

$d(x + y) = dx + dy$;

$d(xy) = xdy + ydx$;

$d\left(\frac{x}{y}\right) = \frac{ydx - xdy}{y^2}$; et $d(x^n) = nx^{n-1}dx$.

Il crée ainsi, en accord avec sa recherche philosophique d'une *characteristica generalis*, d'une langue symbolique, une véritable algèbre des infiniment petits. C'est cet algorithme simple, cette notation commode et ce formalisme opératoire qui feront le succès du calcul leibnizien. Leibniz en publiera, comme vous le savez, un exposé très abrégé et difficile à lire, dans la livraison d'octobre 1684 du journal mathématique de l'époque, les *Acta eruditorum* de Leipzig. Le succès ne fut pas immédiat. Il fallait attendre que les frères Jacques et Jean Bernoulli de Bâle se saisissent du calcul, se l'approprient, l'appliquent et le diffusent dans les journaux, dans leurs cours et dans les académies européennes. Jean Bernoulli donna en 1691-1692 ses fameuses leçons au marquis de l'Hospital, qui fourniront la matière du premier manuel, l'*Analyse des infiniment petits*, publié à

Paris en 1696. Pierre Varignon, avec le soutien de Bernoulli et de L'Hospital, sera amené à défendre le calcul différentiel à l'Académie royale des sciences de Paris. Leibniz, installé dès 1676 à Hanovre, discutera par lettres interposées avec tout ce monde. Peu à peu, l'analyse leibnizienne prendra son essor en démontrant la puissance et la supériorité de ses techniques pour la résolution de problèmes de plus en plus compliqués.

Vous vous demanderez peut-être, Madame, ce qui s'est passé entre-temps en Angleterre. Je vais y venir. Il s'y prépare une des plus odieuses disputes de tous les temps. Celle dont le *Commercium epistolicum* que j'ai récemment acquis ici à Londres, comme je vous l'ai annoncé au début de ma lettre, rend, bien que très partialement, compte. Mais d'abord, il faut que je vous dise qu'il y avait eu quelques contacts entre Leibniz et les mathématiciens anglais, dont Newton. Ce sont ces contacts, leur nature, leur intensité et les traces qu'ils ont laissées, qui vont nourrir toutes les spéculations sur la priorité de la découverte du calcul infinitésimal. Dès les premiers mois de 1673, Leibniz avait visité Londres et avait été élu membre de la Royal Society. De retour à Paris, il avait initié un échange épistolaire avec le secrétaire de la société, Oldenburg. N'étant pas mathématicien lui-même, ce dernier fit appel à Collins pour répondre aux nombreuses questions de Leibniz, qui fut ainsi informé des résultats, mais sans les démonstrations ou les méthodes, que les Anglais avaient obtenus sur les séries infinies. En 1676, Collins et Oldenburg de plus en plus à court de réponses, montrèrent les lettres de Leibniz à Newton et le pressèrent de répondre. Ce que Newton fit le 13 juin 1676 par l'intermédiaire d'Oldenburg. Je vous rappelle que Leibniz était alors déjà en possession de son calcul et de son élégant formalisme. Newton y exposa sa manière de réduire les fonctions en séries infinies, suggéra leur application au calcul des aires et donna un certain nombre d'exemples. Leibniz fut enthousiaste et provoqua, par ses nombreuses questions, une autre lettre de Newton. Celle-ci fut expédiée en octobre 1676 mais Leibniz ne la reçut qu'en juin 1677. Entre-temps, Leibniz, en route pour Hanovre où il devait prendre son nouveau service de conseiller du duc, s'était arrêté dix jours à Londres, où il avait rencontré Collins, qui, tombé sous le charme du bouillant philosophe allemand, lui ouvrit ses dossiers. Entre autres, Leibniz put prendre connaissance des écrits newtoniens dont le *De analysi*. Il prit des notes, que j'ai pu voir de mes yeux à Hanovre, mais celles-ci ne concernent que les séries infinies, à l'exclusion des fluxions. Dans sa seconde lettre, longue et substantielle, Newton se concentra de nouveau sur les séries et hésita à livrer le calcul des fluxions. Il crut bon de le cacher sous l'anagramme que voici : *6accdœ13eff7i3l9n4o4qrr4s9t12vx*. Dans le *Commercium epistolicum* que je viens d'acquérir, je lis que déchiffré, l'anagramme livre la phrase : « *Data æquatione quotcunque fluentes quantitates involvente fluxiones invenire et viceversa* »[7]. Ce sont là les deux problèmes que Newton considérait comme fondamentaux et que j'ai cités ci-dessus. En réponse, Leibniz communiqua son calcul des différences à Newton, qui ne réagit guère. Depuis 1676, et, encore plus depuis 1687, date de parution des *Philosophiœ naturalis principia mathematica*[8], Leibniz connaissait les recherches de Newton et savait qu'il était en possession d'un calcul analogue au sien. Des extraits des lettres furent d'ailleurs publiés par John Wallis dans son *Treatise of Algebra* dès 1685. Leurs textes complets, furent eux-mêmes dévoilés avec le consentement de Leibniz, dans le volume 3 des *Opera* du même Wallis en 1699. C'est cette année même qu'éclata la querelle sur la priorité de la découverte du calcul infinitésimal.

7 - Étant donné une équation quelconque contenant des quantités fluentes, trouver les fluxions et vice versa.
8 - Les principes mathématiques de la philosophie naturelle.

Il est impossible de relater ici les multiples rebondissements de cette dispute. Elle couvait, dans un climat de suspicion entretenu par les amis londoniens de Newton, depuis que Leibniz avait été le premier à publier l'algorithme du calcul différentiel. Il n'avait pas mentionné le moins du monde le nom du mathématicien anglais. En plein milieu d'un ouvrage consacré à l'inclinaison des murs pour que l'exposition des arbres fruitiers soit la meilleure, le jeune Nicolas Fatio de Duillier, un helvète dont la relation à Newton est dite avoir été fort ambiguë, ouvrit les hostilités. Il publia la phrase que voici : « *Convaincu par l'évidence des faits, je reconnais que Newton fut le premier et de plusieurs années le plus ancien inventeur de ce calcul. Si Leibniz, le second inventeur, lui a emprunté quelque chose, je préfère ne pas juger et laisser cela à d'autres, à ceux qui ont vu les lettres de Newton et ses autres manuscrits. Ni le silence du plus modeste Newton, ni l'empressement de Leibniz à s'attribuer partout l'invention du calcul n'en imposeront aux personnes qui examinent ces papiers, comme je l'ai fait moi-même* », voyez la page 18 de cet ouvrage. La guerre des petites phrases avait débuté. Je ne vais pas vous les faire lire toutes. Leibniz choisit le plus souvent l'anonymat pour répondre à ces insinuations et ne manqua pas de décocher quelques flèches contre ces Messieurs les Anglais. Leur réponse fut une attaque frontale : « *... l'arithmétique des fluxions, que M. Newton a sans aucun doute inventée le premier.... a été publiée plus tard par M. Leibniz sous un nom différent et utilisant une notation différente dans les* Acta eruditorum », écrit John Keill dans un article sur les forces centrales inséré dans les *Philosophical Transactions*, le journal officiel de la Royal Society, parues en 1709. Offusqué, Leibniz demanda réparation par une lettre adressée à Hans Sloane, secrétaire de la Société de Londres. Celle-ci était présidée depuis 1703 par Newton en personne. Pour trancher la dispute entre Keill et Leibniz, deux membres de la Société, Newton instaura une commission prétendument neutre et internationale. Mais il lui dicta sa décision sous la forme d'un opuscule, le fameux *Commercium epistolicum*, imprimé aux frais de la Société et largement diffusé auprès des figures clés de l'Europe savante. Pour Newton, le fond du débat est une question de biographie et d'histoire. Les documents qu'il a rassemblés doivent garantir la priorité de son invention. De fait, je dois vous dire, Madame, à la lumière de ce que j'ai lu dans le *Commercium*, qu'il y a véritablement création d'un récit (tout à fait cohérent) à partir d'un montage judicieux d'extraits de textes de provenance et de statut variés (lettres, traités, rapports, etc.) liés entre eux par un texte anonyme interpolé. De plus, en parallèle, un commentaire de bas de page dicte le sens qu'il faut donner aux textes lus – souvent les notes commencent par « *Sensus est quod,...* » – et impose une interprétation : la méthode des fluxions ne fait qu'une seule et même chose avec le calcul différentiel, et Newton en est le premier inventeur. « *Il faut... qu'il* [Leibniz] *renonce au droit qu'il prétend avoir à la méthode différentielle de M. Newton, en tant que second inventeur : les seconds inventeurs n'ont point de droit* ». C'est ce que Newton exige dans le compte rendu anonyme qu'il rédigea pour les *Philosophical Transactions* et qu'il fit publier en français dans le *Journal littéraire* (1715) de la Haye.

C'est par l'intermédiaire d'Oldenburg (ci-dessus), secrétaire de la Royal Society, que Leibniz questionna Newton sur les séries infinies.

Sous la plume de Newton, et sous le nom de Keill, deux arguments sont répétés à satiété : (1) Les deux méthodes ne diffèrent entre elles que dans le nom et dans les expressions, dx ou $\dot{x}$: (2) Une méthode ne consiste pas en une notation, mais dans la manière d'opérer. La première peut changer, sans que la seconde en soit altérée.

D'après la manière dont j'ai exposé ci-dessus les concepts fondamentaux des deux méthodes, vous aurez compris, Madame, que je n'adhère pas à ces arguments. L'approche de Newton est avant tout cinématique, alors que celle de Leibniz est géométrique, même si son point de départ était les sommes et différences de nombres. Comme Leibniz, je crois que l'écriture mathématique est constitutive d'une méthode. Et il est certain que la simplicité de l'écriture différentielle explique pour partie la fécondité extraordinaire de cette méthode.

Confronté au montage pernicieux du *Commercium*, Leibniz répondit d'abord par le mépris. Il refusa le débat avec John Keill, qu'il traita d'« *homme nouveau* », puis, sous la pression de ses amis, finit par diffuser, le 29 juillet 1713, un tract anonyme, du nom de « *charta volans* », dans lequel il impliqua Jean Bernoulli. La querelle se déplaça alors sur le terrain des mathématiques. Jean Bernoulli accusa Newton de ne pas savoir différentier correctement les différences, c'est-à-dire calculer les fluxions secondes. Et pour le prouver, il poussa Leibniz à proposer un défi aux mathématiciens anglais. Celui-ci tourna court à cause d'une formulation trop spécifique du problème retenu, celui des trajectoires orthogonales.

Très vite la querelle s'est teintée d'accents nationalistes, elle s'est élargie aux newtoniens s'opposant aux leibniziens, puis aux Anglais contre les Continentaux. Différentes médiations, comme celles de Chamberlayne et de l'abbé Conti ont lamentablement échoué. « *M. Leibniz est mort; et la dispute est finie* », peut écrire l'abbé Conti le 10 décembre 1716, depuis Hanovre, où il avait accompagné le roi George I^er d'Angleterre dans l'espoir de rencontrer Leibniz. Il y a eu encore quelques escarmouches après ce décès, mais je crains, Madame, de vous lasser et je vais en rester là pour aujourd'hui, non sans vous avoir avoué ce que vous aurez peut-être déjà deviné : mon parti pris pour Leibniz. Je suis avec tout l'empressement possible,

Madame,

Votre très humble & très

obéissant serviteur

abbé Sophus Thomæ ■