J. Prestet

[...]

DE LA NATURE DES RACINES IMAGINAIRES.

17. CE sont les difficultez que je viens d'éclaircir, qui m'ont fait naître l'occasion d'éxaminer & d'expliquer avec plus de soin la nature des racines fausses, & celle des racines qu'on nomme imaginaires. On a déja fait voir[b] que les unes & les autres, à proprement parler, sont imaginaires, puisqu'elles supposent des absurditez. Mais les fausses ne supposent que des absurditez simples ou linéaires; & les imaginaires tirées du second degré en supposent de planes & qui sont compliquées, comme lorsqu'on veut prendre une moyenne proportionnelle $\sqrt{-ab}$ entre une grandeur positive $+a$ & une négative $-b$, ou une moyenne entre la positive $+a$ & la négative $-a$. Et les absurditez du troisiéme degré se peuvent toutes rapporter ou réduire à ces deux espéces. Comme si on suppose $z^3 + a^3 \propto 0$, ou $z^3 \propto -a^3$; on tirera de part & d'autre la racine cubique, & on formera l'égalité linéaire $z \propto -a$, ou $z + a \propto 0$. Et divisant l'égalité composée $z^3 + a^3 \propto 0$ par la simple $z + a \propto 0$; l'exposant fournira une égalité plane $zz - az + aa \propto 0$, qui aura deux racines imaginaires $z \propto \frac{1}{2}a + \sqrt{-\frac{3}{4}aa}$, & $z \propto \frac{1}{2}a - \sqrt{-\frac{3}{4}aa}$.

Mais le quatriéme degré peut avoir des contradictions encore plus compliquées que les planes, parce qu'on y peut supposer des contradictions, où il faudra tirer les racines quarrées des racines des grandeurs négatives; comme dans l'égalité $z^4 + a^4 \propto 0$, ou $z^4 \propto -a^4$, l'inconnuë z est $\sqrt{\sqrt{-a^4}}$. Et les contradictions du cinquiéme degré se peuvent toutes rapporter à l'une des trois espéces précédentes. Car si on suppose $z^5 + a^5 \propto 0$, ou $z^5 \propto -a^5$; la valeur de z peut être $-a$. Et l'égalité $z^5 + a^5 \propto 0$ étant divisée par la simple $z + a \propto 0$ donnera l'égalité du quatriéme degré $z^4 - az^3 + aazz - a^3z + a^4 \propto 0$. Et on dira la même chose du sixiéme & du septiéme degré.

Mais le huitiéme en peut avoir encore une autre espéce, où il faudra tirer les racines des racines des racines quarrées des grandeurs négatives. Et tous les autres degrez jusques au seiziéme n'auront point d'autres espéces de contradictions que les quatre, dont on vient de parler. Mais le seiziéme en pourra recevoir une autre. Et ensuitte le trente-deuxiéme une autre, & le soixante-quatriéme encore une nouvelle. Et ainsi du reste jusques à l'infini, les augmentant seulement aux degrez dont le nombre est un terme de la progression double; sans ajoûter aucune autre espéce pour les degrez qui sont entre ceux-là. Car supposant par exemple une égalité $z^{10} + a^{10} \propto 0$, ou $z^{10} \propto - a^{10}$, on aura une valeur $zz \propto - aa$, & $z \propto \sqrt{-aa}$. Et si on suppose $z^{11} + a^{11} \propto 0$, ou $z^{11} \propto - a^{11}$, on aura une valeur $z \propto - a$. Et l'égalité $z^{11} + a^{11} \propto 0$ étant divisée par la simple $z + a \propto 0$, donnera pour exposant celle de dix dégrez $z^{10} - az^{9}$ $+ aaz^{8} - a^{3}z^{7} + a^{4}z^{6} - a^{5}z^{5} + a^{6}z^{4} - a^{7}z^{3} + a^{8}zz - a^{9}z + a^{10} \propto 0$. Et c'est le même à peu prés des autres degrez. Il étoit d'autant plus à propos d'expliquer avec soin les différentes causes des absurditez que les égalitez renferment, que nul ne s'étoit encore mis en peine de nous en instruire, ni peut-être de les examiner un peu en détail.