BIBLIOTHÈQUE INTERUNIVERSITAIRE
SCIENTIFIQUE JUSSIEU
SCIENCE ET SOCIÉTÉ
TOUR 56-55 - 4e ÉTAGE
4, PLACE JUSSIEU
75252 PARIS CEDEX 05

SYNTAXE MATHÉMATIQUE

LIVRE I

I AVANT-PROPOS

C'est avec beaucoup de pertinence à mon avis, mon cher Syrus, que les vrais philosophes ont distingué philosophie théorique et philosophie pratique, car, s'il arrive que la philosophie pratique soit précédée de la théorique, il n'en demeure pas moins que de grandes différences les opposent. D'abord, certaines vertus morales peuvent exister chez beaucoup de gens sans instruction, alors que la théorie de l'univers est inaccessible sans apprentissage ; ensuite la philosophie pratique exige, pour se montrer pleinement utile, la constance dans l'effort appliqué à l'action, tandis que la philosophie théorique réclame le progrès dans les connaissances scientifiques. Aussi avons-nous décidé, pour mettre nos actions en harmonie avec nos spéculations, de toujours et partout chercher la beauté et l'ordre dans notre vie, et de consacrer le plus clair de notre temps à l'apprentissage de ces principes, si

beaux et si nombreux, et tout particulièrement de ceux qui composent la science mathématique[1].

La philosophie théorique est fort harmonieusement divisée par Aristote en trois espèces principales qui sont la Physique, la Mathématique et la Théologie. En effet tout ce qui existe tient sa consistance de la matière, de la forme, et du mouvement ; or chacun de ces éléments, par définition, ne peut être observé isolément ; seul l'esprit peut le concevoir isolé des autres.

Soit le premier mouvement de l'Univers : il aurait pour cause première (si l'on s'en tient à une explication simple) un Dieu, invisible et immuable, et réclamerait pour mode de recherche le Théologique, car une action pareille, qui s'exerce dans les zones les plus élevées de l'univers, ne peut être conçue que par intuition, surtout qu'elle est totalement séparée de la réalité sensible.

Le mode d'investigation qui s'applique à la matière, et à la qualité toujours mouvante de cette matière, étudiant par exemple la blancheur, la chaleur, la douceur, la mollesse, etc. peut s'appeler Physique ; la substance correspondante fait partie des objets périssables, situés au dessous de la sphère de la lune.

Le mode d'explication qui porte sur la qualité, aussi bien dans les espèces que dans les mouvements de translation[2], étudiant la figure, la quantité, la grandeur, et aussi le lieu, le temps, et autres choses semblables, peut être défini comme Mathématique ; cette science tient pour ainsi dire le milieu entre les deux autres, non seulement parce qu'elle peut se concevoir aussi bien avec que sans le secours des sens, mais aussi parce qu'elle concerne absolument tous les êtres, mortels et immortels : elle change avec ceux qui toujours changent, vu qu'elle en est inséparable ; avec ceux qui sont éternels et de nature éthérée, elle partage l'immobilité, étant donné sa permanence[3].

Voilà pourquoi, à notre avis, les deux autres branches de la philosophie théorique mériteraient d'être qualifiées de conjecturales, plutôt que de véritablement scientifiques, la Théologie, parce qu'elle porte essentiellement sur l'invisible et l'incompréhensible, la Physique, à cause de l'instabilité et de l'impénétrabilité de la matière, ce qui rend illusoire l'espoir de jamais réaliser l'unanimité parmi les philosophes. Seule, la Mathématique, à condition de la pratiquer avec rigueur, offre à ses adeptes un savoir

1.- Ptolémée applique donc les préceptes de la philosophie pratique dans sa vie, et ceux de la philosophie théorique dans les études qu'il a entreprises et qui doivent contribuer au progrès scientifique.

2.- Ptolémée distingue toujours soigneusement le mouvement de rotation où tout revient à son point de départ, donc semble rester en place, et le mouvement de *metabasis*, impliquant un changement de place, une translation.

3.- Tout ce passage sur la philosophie théorique manque de clarté. Le terme de *eïdos* y est utilisé à temps et à contre-temps, avec souvent des sens différents entre lesquels le choix n'est pas facile. La répartition des sciences (théologie, mathématique, physique) en fonction de la tripartition de chaque objet existant en matière, forme, mouvement, est présentée de façon spécieuse, la théologie étant considérée comme la science du premier mouvement, généré par Dieu, la physique, comme la science de la matière toujours mouvante, les mathématiques comme la science des formes et des mouvements de translation.

solide et indubitable, car les démonstrations s'y font par les voies indiscutables de l'arithmétique et de la géométrie. Aussi avons-nous décidé de faire porter l'essentiel de nos efforts sur cette discipline ; nous l'embrasserons si possible dans sa totalité, mais privilégierons tout spécialement la recherche sur les objets divins et célestes, parce que c'est la seule qui porte sur le permanent et l'immuable, et donc c'est la seule capable, dans le domaine qui est le sien, où règnent la clarté et l'ordre, d'être elle aussi éternelle et immuable, ce qui est le caractère propre à toute connaissance scientifique.

De plus, la Mathématique fournit aux deux autres disciplines une contribution qui ne le cède en rien à la leur propre : au genre théologique, elle ouvrira magnifiquement la voie, car elle est seule capable de deviner juste dans l'interprétation de cette force immuable et complètement à part, en mettant en rapport les objets sensibles, qui se meuvent et qui sont mus, et les objets éternels et insensibles, pour la direction et l'ordre de leurs mouvements. A la Physique, elle n'apportera pas peu, car la spécificité de la substance matérielle se reconnaît en général à la manière dont elle réagit aux mouvements de translation ; par exemple, le corruptible ou l'incorruptible se reconnaissent au mouvement, rectiligne ou circulaire ; le lourd ou le léger, le passif ou l'actif, au mouvement, centripète ou centrifuge.

Et quant à la probité dans nos actes et en morale, c'est la Mathématique qui peut le mieux nous rendre aptes à la discerner : la contemplation des liens de parenté entre les objets divins, l'observation d'une si belle ordonnance, de pareille harmonie, dans une telle absence d'ostentation, développent chez ceux qui les pratiquent l'amour de

cette beauté divine ; elles les habituent et les poussent, comme sous l'effet d'une seconde nature, à structurer leur âme de pareille façon[4].

Cet amour pour la contemplation de ce qui est éternel et immuable, nous allons nous aussi, sans relâche, tenter de le fortifier, d'abord en étudiant les découvertes faites, dans ce domaine, par les savants qui se sont lancés dans cette recherche avec zèle et générosité[5], puis en choisissant de rassembler à notre tour le supplément de connaissances que le temps écoulé depuis eux jusqu'à nous a permis d'acquérir. C'est donc une mise à jour de tout le savoir humain que nous essaierons de présenter aussi brièvement que possible, et assez simplement pour que des étudiants, après une initiation sommaire, puissent suivre.

Par souci d'être complet, nous exposerons tout ce qui est utile à l'intelligence des choses célestes, en suivant l'ordre traditionnel ; mais pour éviter d'être trop long, nous nous contenterons de rappeler ce qui a été bien élucidé par les Anciens ; seuls les points qui n'avaient pas été parfaitement saisis ou dont on n'avait pas tiré tout le parti possible seront traités avec toute la précision désirable.

4.- Rappel de la philosophie pratique évoquée plus haut.

5.- Ptolémée pense surtout à Hipparque, auquel il fait souvent référence dans la *Syntaxe Mathématique*.

II Le plan de la recherche

Pour mener à bien la synthèse projetée, il nous faut commencer par présenter la relation d'ensemble entre la totalité de la terre et la totalité du ciel.

Considérant alors séparément chaque partie, il faudra traiter en premier de la position du cercle oblique, et puis des divers lieux de notre monde habité, en indiquant dans l'ordre les différences que l'on constate à chaque changement d'horizon en fonction de la latitude. Cette étude préliminaire fraiera heureusement la voie aux analyses qui suivront[6].

Il faudra traiter en second lieu du mouvement du soleil, du mouvement de la lune, et de toutes leurs conséquences ; sans ces connaissances préalables, il serait impossible de suivre le cours des raisonnements concernant les astres.

La théorie des astres est ce qui vient en dernier, dans la méthode que nous adoptons. Là aussi, on exposera d'abord, comme il est normal, ce qui concerne la sphère dite des fixes ; on traitera ensuite des cinq astres que l'on nomme planètes.

6.- Ptolémée, au cours de son ouvrage, reste fidèle au plan annoncé.

Présentation de l'ensemble terre – ciel :	I, 3-8 ;
Position du cercle oblique :	I, 9-16 ;
Lieux du monde habité :	II ;
Mouvements du soleil :	III ;
Mouvements de la lune :	IV-V ;
Mouvements du soleil et de la lune :	VI ;
Sphère des fixes :	VII-VIII ;
Les Planètes (Mercure, Vénus, Mars, Jupiter, Saturne :	IX-XI ;
Stations, rétrogradations, écarts en latitude :	XII-XIII.

Dans chaque chapitre de cet exposé, nous prendrons comme points de départ et fondements de ce qui est à découvrir les phénomènes clairement visibles à tous, et les observations indiscutables, tant anciennes que modernes, et nous en déduirons une série de conséquences, démontrées par la géométrie.

Ce qu'il faut admettre d'abord est à peu près ceci : le ciel est sphérique et se meut à la manière d'une sphère ; la terre est, du point de vue de sa forme, approximativement sphérique elle aussi, prise dans son ensemble ; en position, elle est placée au milieu du ciel entier, comme en un centre ; en grandeur et en distance, elle est dans le rapport d'un point avec la sphère des fixes, et ne fait aucun mouvement de translation[7]. Sur chacun de ces points, nous allons procéder à un bref rappel.

III Le ciel se meut sphériquement

Les premières idées sur la question sont probablement venues aux Anciens à la suite d'observations de ce type : ils voyaient le soleil, la lune et tous les astres tourner d'est en ouest, en suivant toujours des cercles parallèles ; ces astres, venus d'en bas, se levaient en semblant surgir de terre ; ils montaient alors graduellement jusqu'à un point culminant, puis redescendaient de semblable manière, s'abaissant progressivement jusqu'à finalement disparaître, en ayant l'air de tomber en terre ; après avoir disparu un certain temps, comme prenant un nouveau départ, ils

7.- C'est l'annonce des chapitres 3 à 8.

recommençaient à se lever et à se coucher, aux mêmes heures et aux mêmes lieux, pour les levers comme pour les couchers, avec dans l'ensemble une grande régularité et beaucoup de similitude dans le retour des mouvements[8].

Ce qui a conduit les Anciens à l'idée de la sphère, c'est surtout la révolution des étoiles toujours visibles, que l'on voit s'accomplir circulairement autour d'un seul et même centre ; ce point était forcément le pôle de la sphère céleste, car les étoiles proches de ce point tournaient sur de petits cercles, les étoiles plus éloignées décrivaient dans leur révolution des cercles de plus en plus grands, à proportion de la distance, et ce jusqu'à un cercle limite[9] au-delà duquel les étoiles commençaient à disparaître ; parmi ces étoiles qui disparaissaient, on constatait que celles situées plus près des étoiles toujours visibles restaient disparues peu de temps, celles situées plus loin le restaient davantage, à proportion de la distance. Des observations de ce genre ont suffi au début pour donner aux Anciens l'idée de la sphère.

Toutes les observations ultérieures ont confirmé cette idée, car tous les phénomènes sans exception contredisent toute autre idée que celle-là[10]. Supposons par exem-

8.- Le mouvement des planètes (au nombre desquelles les Grecs rangeaient le Soleil et la Lune), plus visible mais moins régulier, n'est pas un exemple très probant, comme Ptolémée le suggère lui-même. C'est surtout le mouvement des étoiles fixes qui a pu faire naître l'idée de la sphère céleste mobile autour d'un axe.

9.- C'est le cercle que les Grecs appelaient arctique ; tangent à l'horizon du lieu choisi pour l'observation, il était variable avec la latitude.

10.- Utilisation, très fréquente chez Ptolémée, du raisonnement par l'absurde.

ple que le mouvement des astres se fasse en ligne droite et à l'infini, comme certains l'ont cru. Quel processus imaginer pour expliquer que, comme on l'observe, tous les astres commencent leur mouvement au même point, jour après jour ? Comment les astres pourraient-ils revenir au même point si leur élan les envoyait à l'infini ? Ou comment ne les verrait-on pas revenir ? Ou comment ne diminueraient-ils pas graduellement de grandeur avant de disparaître ? Or, bien au contraire, ils nous apparaissent plus grands au moment de leur disparition, et c'est graduellement qu'ils sont interceptés, et comme sectionnés, par la surface de la terre.

Prétendre par ailleurs que les astres s'allument en sortant de terre et s'éteignent en y retombant[11] serait totalement absurde. Même si l'on accordait en effet que la belle organisation qui régit les dimensions et le nombre des astres, leurs distances, les lieux et les temps, est le pur produit du hasard, et qu'une partie de la terre a le pouvoir d'allumer, une autre d'éteindre, ou plutôt qu'une même partie tantôt allume et tantôt éteint, ou encore que les mêmes astres sont déjà allumés ou éteints ici, mais pas encore là, si donc, disais-je, on accordait tout cela – qui est du dernier ridicule -, que dire des étoiles toujours visibles, qui ne se lèvent ni ne se couchent ? Comment expliquer que des astres qui s'allumeraient et s'éteindraient puissent ne pas se lever partout, et ne pas se coucher partout, et que des astres qui ne subiraient pas ces phénomènes ne

11.- Théorie soutenue par Xénophane de Colophon (c. 500 avt J.C.) d'après Aetius (Diels-Kranz, p. 38). Cf. O. Pedersen, *op. cit.*, p. 36-37.

soient pas en tous lieux au-dessus de la terre[12] ? Il n'est pas possible en effet que les mêmes astres passent leur temps à s'allumer et s'éteindre aux yeux des uns, et qu'aux yeux des autres, ils ne subissent rien de tel. Or il est parfaitement clair que ce sont les mêmes astres qui, à certaines latitudes, se lèvent et se couchent tandis qu'à d'autres, ils ne font ni l'un ni l'autre.

En bref, quelle que soit la figure, autre que sphérique, que l'on suppose au mouvement des astres, les distances de la terre aux diverses parties du ciel seront nécessairement inégales, en quelque lieu que se trouve la terre, et de quelque manière qu'elle soit située. Nécessairement aussi les dimensions des astres et les distances entre les astres[13] paraîtront inégales aux mêmes observateurs, à chaque révolution, puisque, dans ce cas, les astres seraient tantôt à une plus grande distance, tantôt à une moindre. Or ce n'est pas ce que l'on voit se produire. Si les dimensions des astres paraissent plus grandes près de l'horizon, ce phénomène n'est pas dû à un quelconque accroissement de la distance, mais à la vapeur qui, s'exhalant de l'élément humide qui entoure la terre, s'interpose entre notre œil et les astres ; c'est le même phénomène qui se produit pour les objets plongés dans l'eau : ils paraissent plus grands, et d'autant plus grands qu'ils sont plus profondément immergés.

D'autres arguments encore militent en faveur de l'idée

12.- Allusion au phénomène bien connu, évoqué plus haut, de la variation du cercle des étoiles circumpolaires (qui ne se lèvent ni ne se couchent) avec la latitude.

13.- Appel à l'argument de la permanence constatée dans le dessin des constellations au cours des siècles.

de sphéricité. Les épures des cadrans solaires[14] ne pourraient être justes dans aucune autre hypothèse que celle-là. Le mouvement des corps célestes est très rapide et ne rencontre aucun obstacle : or la figure dont le mouvement est le plus rapide est, dans les figures planes, le cercle, dans les solides, la sphère. Des diverses figures isopérimètres, les plus grandes sont celles qui ont le plus d'angles ; le cercle est donc la figure plane la plus grande, et parmi les solides, c'est la sphère : or le ciel est le plus grand des corps.

On peut également partir de raisons physiques pour appuyer cette thèse de la sphéricité du ciel. Par exemple : de tous les corps, celui qui est composé des parties les plus subtiles et les plus semblables (c'est-à-dire le plus homéomère) est l'éther[15] ; les surfaces des homéomères sont elles-mêmes homéomères ; or les seules surfaces homéomères sont, dans un plan, le cercle, dans les solides, la sphère ; puisque l'éther n'est pas plan, mais tridimensionnel, il ne peut être que sphérique. De même, la Nature, auteur de toutes choses, a utilisé, pour créer les corps terrestres et corruptibles, des figures rondes mais non homéomères, tandis que, pour créer les corps divins[16]

14.- Ce sont les analemmes, dessinés sur un plan horizontal, d'un gnomon vertical, ou encore les graduations régulières tracées sur la demi-sphère du *polos*, cadran solaire portatif.

15.- Dans la Physique aristotélicienne, l'éther est le cinquième élément, celui qui contient les astres ; il est situé au dessus de la sphère de la lune.

16.- Ptolémée accorde la divinité aux astres, en particulier aux planètes. Cf. aussi Géminos, I, 20, qui attribue la paternité de cette idée aux Pythagoriciens. Mais Aristote lui aussi était un tenant de la nature divine des astres.

qui sont dans l'éther, elle a pris des figures homéomères et sphériques ; si les corps célestes en effet étaient plans ou discoïdaux, des observateurs les regardant au même moment de différents points de la terre ne les verraient pas de forme circulaire. Aussi est-il normal que l'éther, qui contient les astres et est de même nature qu'eux, soit de forme sphérique lui aussi, et, de par sa qualité d'homéomère, soit entraîné dans un mouvement circulaire uniforme.

IV La terre est sensiblement de forme sphérique

La terre elle aussi, prise dans son ensemble, est sensiblement de forme sphérique : c'est ce que l'on peut montrer en raisonnant ainsi.

L'observation montre que le soleil, la lune et tous les astres se lèvent et se couchent non pas simultanément pour tous les habitants de la terre, mais toujours plus tôt pour les peuples orientaux, toujours plus tard pour les occidentaux. Quant aux éclipses, celles de lune en particulier, bien qu'elles se produisent à un moment donné, on constate que leur occurrence n'est pas mentionnée partout à la même heure (c'est à dire à une heure également distante de midi) ; toujours les heures indiquées par les observateurs orientaux sont plus tardives que celles notées par les observateurs occidentaux[17] ;

17.- Cf. l'éclipse de lune citée dans la *Géographie*, I, 4, qui aurait été observée à Carthage à la deuxième heure et à Arbèles en Assyrie à la cinquième heure. Hipparque recommandait d'utiliser les éclipses de lune pour déterminer les écarts en longitude entre deux villes (cf.

comme l'écart en temps est proportionnel à la distance entre les lieux d'observation, il est normal de supposer que la surface de la terre est sphérique, car l'uniformité dans la courbure de la terre en toutes ses parties fait que les interceptions se succèdent progressivement sur tout le tour ; si la forme de la terre était différente, ce phénomène ne se produirait pas, comme on peut le voir aussi d'autre manière.

Si en effet la surface de la terre était creuse[18], les premiers à voir les astres se lever seraient les occidentaux ; si elle était plane, tout le monde les verrait se lever ou se coucher en même temps ; si elle était triangulaire, quadrangulaire, ou de n'importe quelle autre forme polygonale, les astres se lèveraient de la même manière, et en même temps, pour les habitants d'une même ligne droite, ce qui n'est visiblement pas le cas actuellement. La terre ne saurait non plus être cylindrique, avec la surface courbe dirigée vers le levant et le couchant, et les bases planes tournées vers les pôles du monde (hypothèse que l'on pourrait juger relativement plausible), et ce, pour les raisons évidentes que voici : il n'y aurait alors aucune étoile toujours visible pour aucun des habitants de la

Strabon, I, 1, 12). Dans ce paragraphe, Ptolémée en reste à la courbure en longitude.

18.- Même type de raisonnement chez Cléomède (I, 8) ; faisant appel au cinquième syllogisme des indémontrables (emprunté à la dialectique stoïcienne), Cléomède montre que la terre n'est ni plane, ni creuse, ni cubique, ni carrée, ni pyramidale, et il en conclut qu'elle est sphérique. Sextus Empiricus (*Hypotyposes*, II, 158) précise, à propos des syllogismes indémontrables, que « le cinquième déduit d'une alternative et de la négation d'une de ses faces l'affirmation de l'autre ». Cf. aussi Diogène Laerce, VII, 1, 81.

surface courbe ; ou bien les étoiles se lèveraient et se coucheraient toutes sans distinction, ou bien quantité d'étoiles, toujours les mêmes, situées dans un rayon donné autour de chaque pôle, resteraient toujours invisibles pour tous. Or, dans la réalité, plus nous avançons vers les Ourses et plus il y a d'étoiles australes qui disparaissent, plus aussi on compte d'étoiles septentrionales qui restent toujours visibles. La courbure de la terre dans le sens Nord-Sud, jointe à la courbure dans le sens Est-Ouest que l'on déduit des interceptions proportionnelles, prouve que, dans quelque direction qu'on la considère, la forme de la terre est sphérique.

De plus, si nous nous approchons par mer de montagnes ou de hauteurs quelconques, quelle que soit leur altitude et sous quelqu'angle qu'on les voie, on constate que leur taille augmente peu à peu, comme si elles émergeaient graduellement de la mer où précédemment elles étaient plongées : cela vient de la courbure de l'eau[19].

V La terre est au centre du ciel

Une fois ces points reconnus, si l'on veut en venir à la position de la terre, on doit admettre que les phénomènes ne se produiront tels que nous les voyons que dans

19.- Ceci était la preuve classique depuis Aristote (cf. aussi Strabon, I, 1, 20). Mais Ptolémée ne parle pas de l'autre preuve classique fournie par Aristote : l'ombre de la terre sur la lune lors des éclipses.

l'hypothèse où la terre est au milieu du ciel, jouant le rôle de centre pour la sphère[20].

Si l'on refuse cette idée, il y a trois possibilités : ou bien la terre est à l'extérieur de l'axe, à égale distance de chaque pôle ; ou bien, placée sur l'axe, elle est plus proche de l'un des pôles ; ou bien elle n'est ni sur l'axe ni à égale distance des deux pôles.

La première de ces trois positions se heurte au fait que

1) si l'on imaginait la terre située vers le haut ou vers le bas,

– dans la sphère droite, il n'y aurait jamais d'équinoxe, vu que l'horizon diviserait toujours le ciel en deux parties inégales, l'une au dessus, l'autre au dessous de la terre ;

– dans la sphère oblique, ou bien il n'y aurait pas non plus d'équinoxe, ou bien l'équinoxe ne se produirait pas exactement au milieu de la progression du soleil du tropique d'été au tropique d'hiver ; en effet les distances de l'équinoxe au solstice seraient nécessairement inégales du fait que ce ne serait plus l'équateur (le plus grand des

20.- Encore une fois, Ptolémée a recours au raisonnement par l'absurde. Des trois positions principales qu'il imagine pour la terre, il détaille beaucoup la première, la décomposant en quatre possibilités (mais quel est le sens de haut et bas, ou bien d'est et d'ouest, dans cette perspective ?), est beaucoup moins prolixe sur la deuxième, et passe rapidement sur la troisième. Cléomède pour sa part use encore une fois du cinquième syllogisme des indémontrables pour montrer que la terre n'est ni à l'est ni à l'ouest, ni au nord ni au sud, ni en haut ni en bas : il en conclut qu'elle ne peut être qu'au centre. Euclide (*Phénomènes*, Proposition 1) avait, lui, embrassé dans une seule démonstration la position de la terre au centre et sa réduction à un point par rapport à la sphère céleste.

cercles parallèles décrits par la révolution autour des pôles) qui serait coupé en deux parties égales par l'horizon, mais l'un des cercles qui lui sont parallèles, soit au nord, soit au sud. Or il est unanimement reconnu que les distances de l'équateur aux tropiques sont toujours égales, puisque les augmentations dans la durée des jours, depuis l'équinoxe jusqu'au jour le plus long, au solstice d'été, sont égales aux diminutions dans la durée des jours, depuis l'équinoxe jusqu'au jour le plus court, au solstice d'hiver ;

2) si l'on supposait la terre déportée vers l'est ou vers l'ouest,

– les dimensions et les distances des astres ne paraîtraient ni égales ni identiques, selon que ces astres se trouvent à l'horizon oriental ou à l'horizon occidental ;

– le laps de temps compris entre le lever et le passage au méridien ne serait pas égal à celui qui sépare le passage au méridien du coucher. Or tout cela est bien évidemment en contradiction flagrante avec les phénomènes.

A la seconde de ces positions, celle où, tout en étant sur l'axe, la terre est supposée plus proche de l'un des pôles, on peut faire le même genre d'objection. En effet, s'il en était ainsi, quel que soit le *climat*[21] considéré, le plan de l'horizon découperait le ciel en sections inégales (en elles-mêmes ou entre elles) qui seraient situées l'une au dessus, l'autre au dessous de la terre, suivant la plus ou moins grande distance au pôle. C'est seulement dans la

21.- Le terme de *climat* en grec désigne l'inclinaison (du verbe *clinein*, pencher) de l'axe du monde sur le plan de l'horizon (ou la hauteur du pôle au dessus de l'horizon) ; c'est une manière d'exprimer la latitude.

sphère droite que l'horizon pourrait couper le ciel en deux parties égales. Dans la sphère oblique, où c'est le pôle le plus proche qui est toujours visible, l'horizon ferait toujours plus petite la section située au dessus de la terre, plus grande celle située au dessous ; dans ce cas, le grand cercle médian du zodiaque serait divisé en parties inégales par le plan de l'horizon. Or l'observation prouve qu'il n'arrive rien de tel : toujours et partout, on peut voir six dodécatémories du zodiaque au dessus de la terre, les six autres restant invisibles[22]. Il est donc évident que le zodiaque est coupé en deux parties égales par l'horizon, puisque les mêmes demi-cercles sont tout entiers situés tantôt au dessus de la terre, tantôt au dessous. Plus généralement, si la terre n'était pas située sous l'équateur céleste, mais était déportée vers le nord ou vers le midi, c'est à dire vers l'un ou l'autre pôle, on constaterait que, dans les équinoxes, les ombres des gnomons[23] ne décriraient pas du tout, même approximativement, une ligne droite du levant au couchant, sur des plans parallèles à l'horizon. Or c'est exactement l'inverse que l'on observe en tous lieux.

Il est clair, dans ces conditions, que l'on ne peut pas admettre non plus la troisième position : les objections formulées contre les deux premières feraient chorus contre elle.

En conclusion, la régularité que l'on peut observer dans l'allongement et la diminution des jours et des nuits

22.- C'est la preuve qu'utilise Euclide (*Phénomènes*, Prop. 1) pour montrer que la terre est un point, au centre de la sphère céleste. Cf. aussi Aratos, *Phénomènes*, v. 525 – 558.

23.- Dans les cadrans solaires à tige verticale et à plan horizontal.

serait complètement ruinée si la terre n'était pas située au centre ; les éclipses de lune non plus ne pourraient se produire sur tout le tour du ciel, pourvu seulement que la lune soit diamétralement opposée au soleil, car la terre risquerait souvent de s'interposer sans que les deux astres passent dans les positions diamétralement opposées, quand ils seraient distants de moins d'un demi-cercle.

VI La terre est un point par rapport aux espaces célestes

La terre est approximativement un point par rapport au rayon de la sphère dite sphère des fixes. La preuve en est que, de tous les points de la terre, les dimensions et les distances des astres, au même moment, paraissent toujours égales et semblables ; quand on observe les mêmes étoiles, dans différents *climats*, on ne constate aucune différence, si petite fût-elle. Ajoutons encore que les gnomons, placés en n'importe quel point de la terre, ainsi que les centres des sphères armillaires, ont les mêmes capacités que le centre réel de la terre ; les visées à la dioptre, les trajets circulaires des ombres, s'accordent avec les hypothèses du mouvement apparent aussi parfaitement que si les instruments en question se trouvaient placés au point même qui est le centre de la terre.

Une preuve évidente de la validité de cette opinion est que, en tout lieu, les plans passant par nos yeux, que nous appelons horizons, coupent toujours en deux parties égales la sphère entière du ciel, ce qui n'arriverait pas si les dimensions de la terre étaient perceptibles par rapport à la distance des corps célestes ; seul, le plan passant par le centre de la terre pourrait alors couper en deux parties

égales la sphère céleste ; les plans passant par n'importe quel point de la surface terrestre détermineraient toujours des sections au dessous de la terre qui seraient plus grandes que les sections au dessus.

VII La terre ne fait aucun mouvement de translation

Les raisons citées plus haut permettront aussi de démontrer que la terre ne peut faire aucun mouvement transversal, ni sortir jamais du centre : un tel déplacement entraînerait les mêmes conséquences que si elle occupait une position autre que le centre. Aussi me paraît-il bien inutile de chercher des causes pour expliquer la tendance des corps vers le centre, alors que la position de la terre au centre de l'univers et la tendance qui entraîne tous les graves vers elle sont des évidences, pour peu que l'on observe les phénomènes. Cela est aisé à comprendre : puisque la terre est sphérique et située au centre de l'univers (comme nous l'avons démontré), où que l'on soit, les tendances et les chutes des corps pesants (je parle ici de celles qui leur sont propres) se font toujours et partout perpendiculairement au plan horizontal, qui est tangent au point d'incidence ; de ce fait, il est clair que, si ces perpendiculaires n'étaient pas arrêtées par la surface de la terre, elles se rencontreraient toutes précisément au centre, car toute droite menée en direction du centre est perpendiculaire au plan tangent à la sphère mené par le point d'incidence.

Certaines gens trouvent paradoxal que la terre, une masse si considérable, puisse rester immobile sans s'appuyer sur rien ; ils raisonnent d'après leur propre expé-

rience, sans tenir compte de la spécificité du Tout. La comparaison leur fait commettre une grave erreur. Leur étonnement cesserait à mon avis s'ils savaient que la terre, grosse comme elle est, n'est qu'un point, comparée à l'ensemble du corps qui la contient. Il leur paraîtra possible alors que le proportionnellement infime subisse le pouvoir de l'immensément grand, homéomère de surcroît, et qu'il reste en équilibre sous l'action des forces qui s'exercent sur lui également, de toutes les directions à la fois.

Il n'y a donc dans l'Univers ni haut ni bas en soi, car on ne saurait en concevoir dans une sphère. Mais les composés qui y sont contenus, pour autant qu'ils obéissent à leur tendance propre et à leur mouvement naturel, vont dans deux directions : s'ils sont légers et subtils, ils sont poussés vers l'extérieur, vers la périphérie, pourrait-on dire, et donc ils semblent à chaque fois prendre leur élan vers le haut, car ce qui est au dessus de nos têtes à tous, et qui est appelé « le haut », tend aussi à monter vers la surface qui enveloppe le monde ; s'ils sont graves et denses, ils se portent vers le milieu, vers le centre pourrait-on dire, et paraissent tomber vers le bas, car tout ce qui est sous nos pieds à tous et qu'on appelle « le bas » tend également vers le centre de la terre ; ces corps sont alors normalement comprimés autour de ce milieu, par l'effet opposé des chocs et des résistances. Il est donc normal de considérer que le solide entier constitué par la terre, qui est si grand comparé aux corps qui tombent sur lui, n'est nullement ébranlé par l'impact de ces minuscules corps graves, et attend de pied ferme pour ainsi dire ces chocs convergents. Si la terre avait un mouvement qui lui fût commun avec tous les corps graves et qui fût

identique au leur, elle les précèderait tous dans leur chute, vu l'énormité de ses dimensions ; elle laisserait alors les êtres vivants et tous les corps graves flotter dans l'air, car, en un rien de temps, elle irait, dans sa chute, jusqu'à sortir du ciel. Toutes ces conséquences sont du dernier ridicule, même à simplement imaginer.

D'autres gens aussi avancent des théories qui leur semblent plus plausibles. Accordant le point précédent, auquel ils n'ont rien à opposer, ils prétendent que rien n'empêche de supposer par exemple que le ciel est immobile et que la terre tourne autour de son axe d'ouest en est, avec une rotation à peu près complète en un jour[24] ; ou encore, que le ciel et la terre tournent l'un et l'autre, autour du même axe (comme nous l'avons indiqué), en respectant leurs positions relatives. Il n'y a qu'une chose qui leur échappe : même si, du point de vue des phénomènes célestes, rien à la rigueur n'empêcherait que, pour plus de simplicité, il en soit ainsi, en revanche, du point de vue de ce qui se passe autour de nous et dans l'atmosphère, une telle opinion serait, à l'évidence, parfaitement ridicule.

Si nous leur accordions en effet, ce qui est contraire à la nature,

– que les corps les plus subtils et les plus légers, ou bien sont complètement immobiles, ou bien se meuvent exactement comme les corps de nature opposée (alors que les corps qui sont dans l'air, même peu subtils, se

24.- Cette hypothèse aurait été formulée par Héraclide de Pont, disciple de Platon. Ptolémée ne fait aucune allusion à la théorie héliocentrique d'Aristarque de Samos. Cf. O. Pedersen, *op. cit.*, p. 43-44.

déplacent bien évidemment beaucoup plus vite que n'importe quel corps plus terreux),

– que les corps les plus denses et les plus lourds ont un mouvement propre, rapide et uniforme (alors qu'il est bien connu que les corps terreux ont souvent grand peine à se mouvoir même sous l'effet d'impulsions extérieures),

il leur faudrait bien reconnaître que la rotation de la terre serait le plus impétueux de tous les mouvements que l'on constate autour d'elle ; la terre en effet, en un temps fort bref, accomplirait une révolution si considérable que tous les objets qui ne s'appuieraient pas sur elle paraîtraient se mouvoir toujours dans le même sens, inverse de celui de la terre ; pas un nuage ne paraîtrait aller vers l'orient, pas un oiseau en vol, pas un projectile n'irait vers l'est, car la terre les prendrait toujours tous de vitesse, et les précèderait dans son mouvement vers l'orient, si bien que, la terre excepté, tout le reste semblerait faire marche arrière en direction de l'occident.

Si l'on prétendait que l'air atmosphérique aussi est entraîné par le même mouvement de rotation et à la même vitesse, il n'en resterait pas moins que les corps composés qui y sont contenus paraîtraient toujours en retard sur le mouvement conjugué de la terre et de l'air ; s'ils étaient entraînés par la rotation comme ne faisant qu'un avec l'air, on n'en verrait aucun avancer ou reculer ; ils resteraient toujours immobiles ; des oiseaux en vol, des projectiles qu'on aurait lancés, n'effectueraient aucun trajet, aucun déplacement, alors que c'est précisément ce que nous les voyons faire si clairement, comme s'ils ne subissaient aucun ralentissement, aucune accélération consécutifs au mouvement de la terre.

VIII Existence dans le ciel de deux premiers mouvements

Telles sont donc, sommairement et suffisamment esquissées en manière d'introduction, les hypothèses indispensables à l'intelligence des divers points de doctrine que nous allons exposer, et des conséquences que nous en tirerons. Elles seront d'ailleurs confortées et totalement vérifiées par l'accord constaté entre les résultats démontrés par leur entremise et les phénomènes observés.

Voici pourtant encore une autre hypothèse d'ensemble qu'il faudrait à juste titre mettre au rang des préliminaires. Il existe dans le ciel deux premiers mouvements différents :

– l'un, qui emporte toutes choses d'orient en occident, en une rotation éternellement identique à elle-même et à vitesse constante, le long de cercles parallèles entre eux, décrits bien évidemment autour des pôles de cette sphère qui entraîne toutes choses en un mouvement uniforme ; de ces parallèles, le plus grand est appelé équateur parce que c'est le seul qui soit toujours coupé en deux parties égales par le grand cercle de l'horizon, et que le soleil, en le parcourant dans la révolution diurne, produit sensiblement partout l'équinoxe ;

– l'autre, en vertu duquel les sphères des planètes, obéissant à un mouvement inverse du précédent, se meuvent autour d'autres pôles, différents des pôles de la première rotation[25].

25.- Cf. Géminos, I, 19 : « L'astronomie tout entière repose sur l'hypothèse que le soleil, la lune et les cinq planètes se déplacent à vitesse constante suivant un mouvement circulaire inverse de celui de l'univers ». Les « autres pôles » sont ceux de l'écliptique.

Si nous supposons qu'il en est ainsi, c'est parce que, d'après ce que nous voyons tous les jours, tous les astres absolument qui sont dans le ciel paraissent à nos yeux faire leurs levers, leurs culminations méridiennes et leurs couchers selon un trajet régulier, parallèle à l'équateur, ce qui est une caractéristique de la première rotation. Si on se livre pourtant à des observation répétées et continues, on constate que tous les astres conservent entre eux les mêmes distances et gardent les particularités, propres aux lieux, voulues par le premier mouvement, sauf le soleil, la lune et les astres errants. Ces astres en effet font des mouvements variés et disparates, mais qui tous, par une sorte d'opposition au mouvement général, vont en direction du levant et des étoiles qui suivent (il s'agit là des étoiles qui conservent toujours entre elles les mêmes distances[26] et sont entraînées comme par la rotation d'une seule sphère).

Si un tel déplacement pour les planètes se faisait le long de cercles parallèles à l'équateur, c'est à dire autour des pôles qui commandent la première révolution, il suffirait de considérer une seule et même rotation pour tous les astres, qui serait une conséquence de la première. On pourrait légitimement croire alors que le déplacement des planètes est dû à des retards variés, et non à un mouvement en sens inverse. Or en fait, outre leurs déplacements vers l'orient, les planètes semblent toujours faire des translations ou vers le nord ou vers le sud, avec des amplitudes de déplacement qui n'offrent à l'observa-

26.- Il s'agit donc des étoiles dites fixes, par opposition aux étoiles errantes (le verbe grec *planân* signifie errer).

teur aucune régularité (ces phénomènes semblent être provoqués par des sortes d'impulsions).

Pourtant, si ces déplacements paraissent irréguliers dans une telle perspective, ils deviennent tout à fait ordonnés si on les rapporte au cercle oblique (oblique sur l'équateur) qui, de ce fait, paraît le seul cercle propre aux planètes ; ce cercle oblique est exactement décrit, pourrait-on dire, par le mouvement du soleil, et il est fréquenté aussi par la lune et les planètes qui circulent toujours en ses entours, ne sortant jamais par accident de l'aire de translation découpée, pour chaque astre, de chaque côté du dit cercle oblique. Du fait que ce cercle se révèle à l'observation être un grand cercle, car le soleil s'avance d'une quantité égale au nord et au sud de l'équateur, du fait aussi que les déplacements vers l'orient de toutes les planètes se font le long de ce seul et même cercle, comme nous l'avons dit, il était indispensable de supposer un second mouvement, différent de celui de l'univers, qui s'accomplisse, autour des pôles du cercle oblique considéré, en sens inverse du premier mouvement.

Si maintenant nous prenons le grand cercle qui passe par les deux pôles[27] des deux cercles sus-dits (c'est-à-dire l'équateur et le cercle qui est incliné sur l'équateur), il coupe obligatoirement en deux partie égales et à angles

27.- Ce cercle est celui que l'on a l'habitude d'appeler le colure des solstices. Cf. Géminos, V, 49-50 : « Passent par les pôles les cercles que l'on nomme parfois colures (c'est-à-dire tronqués)... On les appelle ainsi du fait qu'ils restent partiellement invisibles... On trace seulement les cercles qui passent par les points solsticiaux et équinoxiaux et qui divisent en quatre parties égales le cercle médian du zodiaque ».

droits l'un et l'autre de ces cercles ; nous aurons alors quatre points sur le cercle oblique :

– deux, aux intersections avec l'équateur, diamétralement opposés, qu'on appelle points équinoxiaux (le point qui indique le passage du soleil du sud vers le nord est appelé point équinoxial de printemps ; l'autre, qui lui est diamétralement opposé, est dit point équinoxial d'automne) ;

– deux, aux intersections avec le cercle décrit par les deux pôles, diamétralement opposés eux aussi, et qualifiés de solsticiaux (le point situé au sud de l'équateur est appelé point solsticial d'hiver, celui situé au nord, point solsticial d'été).

On admettra donc :

– un premier mouvement unique, qui embrasse tous les autres ; il sera circonscrit et limité pour ainsi dire par le grand cercle décrit par les deux pôles, qui lui-même tourne et entraîne avec lui, d'orient en occident, autour des pôles de l'équateur, tout le reste, comme en direction du cercle que l'on appelle méridien (ce dernier cercle, qui ne diffère du précédent que parce que tout méridien[28] ne passe pas par les pôles du cercle oblique, et aussi parce

28.- Il y a une certaine confusion dans cet exposé où Ptolémée fait du colure des solstices une sorte de méridien origine coïncidant successivement avec tous les grands cercles passant par les pôles de l'univers, qui sont méridiens pour chaque longitude successive. Géminos s'exprimait plus clairement dans sa définition du méridien : « C'est le cercle qui passe par les pôles de l'univers et par le point zénithal ; quand le soleil se trouve sur ce cercle, il est midi ou minuit. Ce cercle reste immobile et conserve la même place durant toute la révolution diurne ».

qu'il est conçu comme continuellement perpendiculaire à l'horizon, est appelé méridien parce que sa position, qui le fait partager en deux parties égales aussi bien l'hémisphère supérieur que l'hémisphère inférieur, indique pour chaque nychthémère les midis et les minuits) ;

– un second mouvement, composite, qui est embrassé par le premier mouvement mais embrasse les sphères de toutes les planètes ; et donc, tout en étant entraîné par le mouvement premier, comme nous l'avons dit, il tourne aussi en sens inverse autour des pôles du cercle oblique ; ces pôles eux-mêmes, portés constamment sur le cercle qui accomplit la première révolution – celui qui passe par les deux pôles -, sont entraînés normalement ; mais, dans le mouvement en sens inverse de la seconde rotation, les pôles du grand cercle oblique le long duquel s'effectue cette révolution conservent toujours la même position par rapport à l'équateur[29].

IX Quelques notions particulières

Voilà donc, dans ses grandes lignes, l'exposé préliminaire des hypothèses indispensables. Au moment d'aborder les démonstrations de détail (nous accorderons la priorité à celle qui permet de mesurer l'arc compris entre les deux pôles susnommés, sur le grand cercle qui les porte), nous trouvons indispensable de commencer par

29.- Les pôles du cercle oblique décrivent en effet, lors de la révolution diurne, des cercles parallèles à l'équateur, qui sont nos cercles polaires, « cercles décrits par les pôles du zodiaque pendant la révolution diurne de l'univers » (Strabon, II, 5, 43).