CHAPITRE II

L'EXPLICATION SCIENTIFIQUE ET LE MODÈLE DES CATASTROPHES

Si les scientifiques — et particulièrement les expérimentateurs — acceptent sans aucune hésitation leur tâche de description du donné empirique, la plupart n'ont au contraire que des notions très partielles — ou partiales — concernant l'explication qui doit être donnée du matériel expérimental ainsi accumulé. Expliquer, c'est en principe répondre à la question : pourquoi ? On pourrait donc penser, « a priori », que la notion de cause va jouer un rôle essentiel dans l'explication scientifique. Mais que la distinction entre description et explication soit chose délicate, l'exemple suivant — classique — est là pour le démontrer.

2.1. Description et explication.

La loi classique de la gravitation de Newton $F = kmm'/r^2$ est-elle une description ou une explication ? A priori, on pourrait n'y voir qu'une simple description, puisque — comme le disait, à regret, Newton lui même dans son célèbre mot : *Hypotheses non fingo*, elle ne fournit aucune explication, aucun modèle, sur l'origine de la force d'attraction entre deux corps. Et cependant, il s'agit là sans doute d'un des plus brillants succès scientifiques de tous les temps. La loi newtonienne fournit, en effet, sinon une explication, du moins une *simplification de la description*

considérable ; par déduction mathématique à partir de cette loi, on peut rendre compte du mouvement des corps célestes, et de la pesanteur sur terre. Une morphologie expérimentale considérable, les éphémérides des planètes de l'époque babylonienne à nos jours se trouve ainsi engendrée par cette simple formule $F = kmm'/r^2$. On voit qu'ainsi, ce qui doit être considéré comme le but essentiel de l'activité théorique du savant, c'est la simplification de la description, la *réduction de l'arbitraire* dans la description. Ce but, évidemment, a des rapports évidents avec la causalité et le déterminisme : dans la mesure où un processus se révèle aléatoire ou indéterminé, il échappe au contrôle de la vision scientifique, et offre une part d'arbitraire qui ne peut être éliminée. En ce sens, on peut dire que le savant est « a priori » déterministe : reconnaître dans les phénomènes un indéterminisme foncier (comme on le fait parfois en Mécanique Quantique et comme le répètent à l'envi les Néo-Darwiniens en théorie de l'évolution) est une attitude anti-scientifique par excellence. Mais si le savant postule en quelque sorte professionnellement le déterminisme, il se gardera bien d'accorder à cette exigence méthodologique une portée ontologique... Nul ne sait si en fait la nature est déterminée ou non. Comme on le verra plus loin, la description, et dans une certaine mesure l'explication, sont possibles dans une théorie dont on n'aura pu établir qu'elle est soumise à un déterminisme rigoureux. Ainsi un linguiste peut parfaitement croire, simultanément, au libre arbitre humain et à la possibilité de formaliser la syntaxe d'une langue...

2.2. Explications réductionnistes et explications structurales.

Selon l'importance accordée à la notion intuitive de causalité, on peut distinguer deux types d'explication scientifiques : l'explication réductionniste et l'explication structurale. On a en fait le schéma suivant :

$$\begin{array}{l} \text{Explication réductionniste} \left\{ \begin{array}{l} \text{externe} \\ \text{interne} \end{array} \right. \\ \text{Explication structurale} \end{array}$$

Soit (X) la morphologie étudiée ; dans un premier stade, on isole mentalement la morphologie (X) des circonstances de sa production : il y a là comme une première démarche de type structural ; puis, en recherchant l'explication, on revient aux circonstances de la production de (X) : y a-t-il des objets (Y) qui apparaissent intuitivement comme étant l'origine, la cause de la morphologie (X)?; en ce cas, l'explication réductionniste externe dira : étudions les objets (Y) causes de (X), et nous pourrons comprendre la morphologie (X). Par exemple, en Linguistique, l'approche réductionniste externe dira : le langage est une morphologie émise par des humains en état d'interaction sociale. La linguistique, étude de la morphologie (X) du langage sera une conséquence de l'étude de l'homme (Y) lui-même : soit du point de vue anatomique ou neuro-psychologique, soit du point de vue psychologique, soit enfin du point de vue de la sociologie.

Si au contraire la morphologie (X) semble évoluer de son propre chef, sans intervention d'êtres extérieurs, on aura recours à l'approche réductionniste interne : on cherchera à mettre en évidence dans le support de (X) des entités plus petites et très stables, les « atomes » dont on pourra formaliser les interactions. L'explication réductionniste type est celle fournie par la mécanique statistique des gaz. On se donne les coordonnées et les vitesses de chaque molécule du gaz, on écrit le système différentiel

$$dx_i/dt = X_i(x_i\, p_i), \qquad dp_i/dt = P_i(x_i\, p)$$

(comprenant 2N équations, si N est le nombre des molécules) et on intégrera ce système, ce qui donnera une description explicite et quantitative de son évolution.

L'explication structurale, elle, est de tout autre nature. On prend la morphologie (X) en elle-même, à un certain niveau d'organisation, comme une combinatoire de champs morphogénétiques. On s'efforce de réduire l'arbitraire de la description du corpus en mettant en évidence ses régularités, ses symétries cachées, on se donne pour but d'engendrer en quelque sorte axiomatiquement la morphologie (X) à partir d'un petit nombre de formes types susceptibles d'engendrer de nouvelles formes par agrégation

spatiale : l'approche structurale repose ainsi (bien que la chose ait été peu remarquée) sur la possibilité d'introduire entre les champs morphogénétiques des opérations de type algébrique : en fait une véritable algèbre des formes. L'approche structurale ne visera pas, en général, à une description déterministique et exhaustive des processus étudiés ; comme elle ignore, en principe, la notion de causalité, elle ne cherchera pas à expliquer la morphologie (X) considérée par l'introduction d'entités plus petites, ni par l'intervention d'agents externes supposés la causer.

2.3. Limites des approches réductionniste et structurale.

a) *L'approche réductionniste externe* se heurte à deux difficultés : la première concerne le caractère intuitif, mais souvent difficile à préciser, de la notion de cause ; par exemple, en embryologie, tel biologiste dira que le plissement d'un feuillet embryonnaire est dû à une force de compression agissant sur ses bords. Pour intuitif que soit ce mécanisme, sa formalisation mathématique est loin d'être simple. On retrouve d'ailleurs cette difficulté dans l'approche réductionniste interne, qui a fait appel, souvent, à des notions très intuitives, comme le « choc » des atomes, dont la formalisation mathématique s'est révélée bien difficile. 2° Les agents externes (Y) qui causent la morphologie (X) sont en général beaucoup plus complexes que la morphologie (X) qu'ils provoquent. Ceci est particulièrement frappant dans l'exemple de la linguistique : la neuro-physiologie, la psychologie, la sociologie sont des sciences bien moins avancées, bien moins formalisées que la linguistique qu'elles voudraient expliquer.

b) *L'approche réductionniste interne.*

Si le modèle de la mécanique des gaz est sans doute l'un des paradigmes les plus parfaits de l'explication scientifique, il n'en comporte pas moins deux algorithmes insuffisamment dissociés dans l'esprit du savant : l'emploi du calcul différentiel comme paradigme de processus déterministique, et l'usage d'atomes en interaction. En dépit de la croyance universelle au contraire, le premier algorithme (emploi du calcul différentiel) est d'une validité beaucoup plus étendue que le second. Très fréquemment le choix des éléments « atomiques » fait problème (exemple : en Biologie, faut-il prendre la cellule ou la molécule ?) : plusieurs niveaux d'organisation peuvent être présents entre lesquels il y a lieu de faire un choix.

Une fois ce choix fait, reste à exprimer, en principe sous forme quantitative, les interactions entre éléments. La chose est souvent difficile sans approximations dont les effets sur le comportement global du système échappent souvent à tout contrôle. De plus, même si l'on a réussi à écrire un système différentiel, ce système est en général d'une telle dimension (Nombre d'Avogadro 6.10^{23}) que l'intégration explicite est impossible. Il faut alors avoir recours à des méthodes statistiques, comme dans la théorie des gaz parfaits. Mais alors, il n'y a plus de morphologie ! Seule une théorie (locale et non globale) des changements de phase permettrait de mettre en évidence une morphologie. Les méthodes quantitatives classiques, qui reposent sur l'emploi de fonctions analytiques, donc continues, permettent difficilement la description de phénomènes discontinus.

c) *L'approche structurale.*

Moins ambitieuse que l'approche réductionniste, l'approche structurale est aussi de ce fait moins féconde. Une fois le schéma formel mis en évidence, que faire de plus ? Comment le justifier, soit intrinsèquement, soit par des considérations tirées de l'environnement ? A s'en tenir à l'élucidation d'un seul niveau d'organisation, on ne tarde pas à sombrer dans la stérilité de l'attitude axiomatique. De plus se pose le problème de l'unicité du modèle formel compatible avec une morphologie donnée.

De toute manière, l'approche structurale suppose la possibilité d'engendrer certaines formes à partir d'autres

formes plus élémentaires, donc elle s'appuie nécessairement sur une algèbre des formes. L'existence d'une telle algèbre n'est connue, classiquement, que pour les morphologies de dimension un, de type fini, qui s'identifient aux langages formels. Le problème d'algébriser les formes multidimensionnelles n'a jamais été attaqué jusqu'à présent, et c'est peut-être l'un des mérites essentiels de la théorie des catastrophes que d'offrir une certaine percée dans ce domaine. Elle aporte une vue nouvelle sur un problème philosophique classique, celui de l'accord des mathématiques et de la réalité.

2.4. Mathématique et réalité.

L'accord fréquemment observé en de nombreuses disciplines du monde animé et inamimé entre une morphologie empirique et une structure, un objet mathématique, soulève un problème classique de philosophie des Sciences. On peut lui donner trois types de réponses :

1° La première attribue cet accord à une « harmonie préétablie » entre mathématiques et réalité. C'est le point de vue platonicien (ou plus exactement Pythagoricien) : Dieu fait toujours de la géométrie.

2° La deuxième attribue l'apparition de la structure mathématique à un phénomène d'équilibre local, ou, comme on dit en Mécanique, à la solution d'un problème d'extrémalité.

3° La troisième — qui est celle de notre modèle — attribue l'apparition de la structure à une hypothèse de *généricité :* en toute circonstance, la nature réalise la morphologie locale la moins complexe compatible avec les données initiales locales.

La première réponse est pure métaphysique. La seconde seule peut être considérée comme scientifique, parce que susceptible, parfois, d'un contrôle quantitatif. Ainsi, selon Prigogine le réseau hexagonal des cellules de convection d'un fluide chauffé sur sa face inférieure (phénomène de Bénard) s'explique par un minimum local de production d'entropie.

La troisième réponse a l'avantage (et l'inconvénient) de conduire à une théorie plus souple que le point de vue 2 (puisqu'il ne postule qu'un déterminisme quantitatif et local). Les points de vue 2 et 3 ne sont d'ailleurs pas incompatibles : ainsi, la solution d'un problème extrémal comme le problème de Plateau (déterminer la surface minimale de contour donné) présentera des singularités « génériques » pour presque toute donnée du contour.

Le modèle des catastrophes offre un moyen d'expliquer la présence des structures, il justifie dynamiquement leur apparition et leur stabilité. Ainsi se trouve réintroduite la notion de causalité et l'intelligibilité qu'elle apporte : le modèle des catastrophes, en effet, réduit tout processus causatif à un seul, dont la justification intuitive ne pose pas de problèmes : le conflit, père, selon Héraclite, de toutes choses. Le modèle permet également de comprendre l'autonomie structurale de chaque niveau d'organisation. On peut également concevoir qu'il s'adapte à la description des rapports interniveaux : en effet, le défaut de déterminisme d'un niveau peut parfois être levé en considérant des entités d'un niveau plus fin. (Ainsi, en Génétique, le choix d'un caractère phénotypique de l'animal entier peut être déterminé par la composition chimique du chromosome.) Inversement, le modèle peut expliquer certains isomorphismes interniveaux, par exemple, le fait que certains mécanismes moléculaires (enzymatiques) simulent le comportement de l'être vivant global trouve sa justification dans l'idée même de catastrophe.

Nous partirons du modèle de la Mécanique Classique : l'évolution d'un système peut être décrite par un Système Dynamique, c'est-à-dire un champ de vecteurs X dans une variété différentiable M. Mais à ce modèle, nous n'attribuerons qu'une valeur locale, le processus total doit être décrit par un champ continu de telles dynamiques. (On retrouve ainsi le modèle primitif de la théorie quantique des champs, avec son champ continu d'oscillateurs.) Ceci nous permettra de rattacher la stabilité structurelle d'une morphologie à la stabilité structurelle d'un système dynamique, notion qu'il nous faut maintenant préciser.

2.5. Systèmes dynamiques. États asymptotiques. Attracteurs.

Définition 1. Un système dynamique (M, X) est la donnée d'une action différentiable du groupe R des réels dans une variété M^n, l'espace de phase. Par dérivation, une telle action définit en chaque point de M un champ de vecteurs X. Réciproquement, la donnée d'un champ de vecteurs X dans M permet, par intégration locale, de définir un « germe d'action » de R dans M. Si M est compacte, on a une action globale.

On appelle orbite $g(m)$ d'un point m de M l'ensemble des images de m par les transformations g du groupe R.

Définition 2. Soit g une orbite du système. Un point m de M est dit point ω-limite de g, si, pour tout $\varepsilon > 0$, et $t_0 > 0$, il existe un temps $T > t_0$, tel que le point m_T se trouve à une distance de m inférieure à ε. L'ensemble des points ω-limite de g, noté $\omega(g)$ est un ensemble fermé invariant de trajectoires.

Définition 3. Deux trajectoires g, g', sont dites *asymptotiques* si elles ont même ensemble ω-limite.

Deux points m, m' de M sont dits asymptotiquement équivalents, si leurs trajectoires sont asymptotiques. Ceci définit entre points de M une relation d'équivalence. En un certain sens, le but de la Dynamique Qualitative est de préciser la nature topologique de cette équivalence. Dans certains cas cette relation est « presque partout » ouverte : à chaque « état asymptotique » correspond un ouvert de M, son « *bassin* ». Dans les parties de M où ces bassins existent, on peut dire que l'on est dans une situation de déterminisme, l'état final étant stable par rapport à des petites perturbations des données. Dans d'autres cas, ces classes sont inextricablement mêlées l'une à l'autre : on est alors dans une situation pratique d'indétermination. C'est dire que le mélange de déterminisme et d'indéterminisme évoqué au § 1.1. se trouve déjà réalisé dans le modèle de la Dynamique classique, lorsqu'on l'interprète « asymptotiquement ».

Définition 4. On appelle *attracteur* du champ X défini sur M, un sous-ensemble A de M vérifiant les conditions suivantes :

(i) Presque toute trajectoire dans A est dense dans A.

(ii) Il existe un système fondamental de voisinages U_i de A dans M tels que : *a*) toute trajectoire d'un point $u \in U_i$ admet A comme ensemble ω-limite. *b*) Si un point a de U_i est tel que l'ensemble α-limite (limite pour $t \longrightarrow -\infty$) de a rencontre A alors a est un point de A.

EXEMPLES :

a) *Attracteur ponctuel.*

En ce cas l'ensemble A se réduit à un point a. Si l'on considère la matrice des parties linéaires du champ X en a (notée $j^1(X)(a)$, jet d'ordre *uh* de X en a), on aura en a un attracteur si les valeurs propres de cette matrice ont toutes leurs parties réelles négatives. Un tel attracteur sera dit « générique ». En effet, le champ autour de a est localement structurellement stable, en ce sens que pour tout champ X' assez voisin de X (en topologie C_1), il y a des voisinages V_i, d'un attracteur a' et un homéomorphisme $h : U_i \longrightarrow V_i$, tel que $h(a) = a'$, qui transforme toute orbite de X en une orbite de X'.

b) *Trajectoire fermée.*

Soit (c) une telle trajectoire, homéomorphe au cercle (S^1). Soit H un germe d'hypersurface transverse à c en un point q de c. La trajectoire issue d'un point m de H recoupe pour la première fois H en m'. La transformation (dite de Poincaré-Floquet) $h : m \longrightarrow m'$ est un germe de difféomorphisme, dont q est un point fixe. Si les valeurs propres de la matrice jacobienne $j^1(h)(q)$ sont de module inférieur à un, la trajectoire fermée est un attracteur générique. En effet, pour tout champ X' assez voisin de X, il existera une

trajectoire fermée c' voisine de c, et un homéomorphisme g qui envoie un voisinage de c sur un voisinage de c', et tel que l'image par g d'une orbite de X est une orbite de X' (propriété de stabilité structurelle).

Ces deux exemples sont les plus simples en ce qui concerne la topologie des attracteurs. Il y en a d'autres, beaucoup plus compliqués : R. Williams, M. Shub ont donné des exemples d'attracteurs à structure topologique très complexes. La description et la classification des attracteurs localement structurellement stables — en un sens affaibli qu'on précisera ci-dessous — est sans doute l'un des problèmes majeurs de la Dynamique Qualitative contemporaine. On peut faire à cet égard les observaions suivantes :

Définition 5. Fonction de Liapunov.

Soit (M, X) un système dynamique. Une *fonction de Liapunov* définie sur un ouvert U de M est une fonction réelle $F : U \longrightarrow R$, qui est croissante sur toute trajectoire de X (En un point où $X = O$, on impose en général la condition $dF = O$). Une fonction de Liapunov peut être globale ($U = M$), ou locale (U vrai sous-espace de M) ; en ce cas, on la supposera *propre* ($F^{-1}(K)$ = compact, si K est compact).

Si A est un attracteur dans M, on peut trouver, en raison des hypothèses de la définition 4, un voisinage ouvert U de A, tel que $h_t(U)$ soit un sous-ouvert de U ; si l'on suppose U muni d'une frontière lisse W, on pourra supposer que les $h_t(W)$ sont les variétés de niveau d'une fonction de Liapunov locale A, propre.

Or, si A est contenu dans le tube $F = \varepsilon$, pour tout champ X', assez voisin de X, on a la propriété suivante : X' *entre* dans le tube $F = \varepsilon$, et par suite il existera un ou plusieurs attracteurs de X' situés dans ce tube. On voit donc qu'un attracteur tel que A ne peut subir d'« explosion » du fait d'une petite perturbation du champ. Au contraire, l'attracteur peut subir une « implosion » en un ou plusieurs sous-attracteurs, en général de dimension inférieure. Mais à cause de cette perte de dimension, cette

cascade d'implosions doit cesser ; ceci motive la conjecture suivante — qui n'a pas encore été infirmée, à ma connaissance :

Conjecture « spectrale ».

Soit M une variété compacte et D(M) l'espace des champs de vecteurs sur M avec la topologie C^r, $r \geq 1$. Il existe un ouvert partout dense U dans D(M) tel que tout champ X de U a les propriétés suivantes :

(i) X n'a qu'un nombre fini d'attracteurs A_i, et la réunion $B(A_1)$ des bassins de ces attracteurs est partout dense dans M ;

(ii) Chacun des attracteurs est « topologiquement » structurellement stable : pour tout champ X' assez voisin de X dans U, il y a un homéomorphisme h défini sur un voisinage U_i de A_i, dont l'image est un attracteur A'_i de X' (Mais cet homéomorphisme n'est pas compatible avec les orbites...).

Définition 6. Si le seul attracteur présenté par X est M elle-même, on dit que X est *ergodique* dans M.

2.6. Cas des systèmes hamiltoniens.

Un système hamiltonien est défini par une variété symplectique M^{2n}, i.e. une variété de dimension paire munie d'une 2-forme fermée de rang maximum (comme $a = \Sigma\, dp_i \wedge dq_i$), avec une fonction réelle $H : M^{2n} \longrightarrow R$, le *hamiltonien*. On déduit du hamiltonien un champ de vecteurs X par la formule $i(X) \lrcorner\, a = dH$ (formule de Hamilton-Jacobi).

On sait que le champ X admet le hamiltonien H comme intégrale première, et qu'il laisse la forme invariante a (ainsi que sa n^{eme} puissance extérieure, la *mesure de Liouville*). Il en résulte que, dans une hypersurface d'énergie constante $H = \text{Cste}$ le champ X ne peut admettre d'at-

tracteurs (Une dynamique hamiltonienne admet la réversibilité du temps : or, il est douteux qu'on puisse avoir une phénoménologie quelconque sans une certaine irréversibilité du temps : pour que quelque chose se produise il faut que la situation à l'avenir soit préférée à la situation présente, ce qui exclut une dynamique où la flèche du temps peut être retournée. C'est pourquoi le raccord d'une théorie purement hamiltonienne, comme la Mécanique Quantique, avec la phénoménologie exige un postulat « ad hoc », la *théorie du mesurement*, postulat qui confère à l'expérimentateur un rôle suspensif à l'égard même de la dynamique de la théorie).

Néanmoins, il existe dans les systèmes hamiltoniens certains ensembles fermés invariants, doués de stabilité structurelle vis-à-vis des perturbations hamiltoniennes, et qu'on peut considérer comme des « attracteurs vagues ». Tel est le cas, par exemple, d'une trajectoire fermée centrale (étudiée par Kolmogoroff, Moser... etc.). En ce cas, le difféomorphisme de Poincaré-Floquet est un difféomorphisme symplectique. Il en résulte que ses valeurs propres se répartissent, soit en « quatuors » de la forme $(\lambda, \bar{\lambda}, \lambda^{-1}, \bar{\lambda}^{-1})$ soit en duos $((\mu, \bar{\mu})$ avec $|\mu| = 1)$, et on ne peut passer d'une configuration à l'autre que par collision de couples de racines sur le cercle unité, le difféomorphisme de Poincaré est « central », tangent à une rotation. On peut en déduire l'existence d'un ensemble de mesure non nulle de trajectoires qui spiralent autour de la trajectoire fermée sans s'en écarter. Toutes ces trajectoires définissent manifestement le « même » état thermodynamique que la trajectoire fermée initiale, et il n'y a pas ergodicité du système global.

EXEMPLE : *Oscillateur harmonique.*

Si $M^{2n} = \mathbb{C}^n$, $H = \Sigma p_i^2 + q_i^2$, $z_i = q_i + ip_i$,

les hypersurfaces $H = \text{Cstes}$ sont alors des sphères de dimension $2n - 1$; toutes les trajectoires sont des cercles, qui définissent dans S^{2n-1} la *fibration de Hopf* sur l'espace projectif complexe $\mathbb{C}P(n - 1)$. Il s'agit là, évidemment, d'une situation hautement non générique. Néanmoins, comme l'ont montré les travaux d'Arnold, une intégrale première d'un système hamiltonien possède une certaine stabilité structurelle de forme statistique ; c'est ce qui explique que des invariants comme les moments cinétiques aient un sens, en dépit du fait que les symétries qui leur donnent naissance ne sont qu'approximatives... Nous ne ferons qu'exceptionnellement appel aux dynamiques hamiltoniennes dans ce qui suit, en raison de leur incompatibilité avec l'irréversibilité des phénomènes.

2.7. Le modèle.

Soit $D = B \times T$ le domaine siège du processus morphologique considéré. On admet qu'en tout point u de D, l'ensemble des états locaux du processus peut être paramétrisé par les points d'une variété différentiable compacte M, la même pour tout point de D *variété des états internes*. On sera ainsi amené à paramétriser la totalité des états locaux du processus par les points du produit $E = D \times M$, fibré trivialement sur D avec la fibre $Mp : E \longrightarrow D$.

Définition 7. On appelle *champ métabolique* sur D un champ de vecteurs X défini sur E, tangent aux fibres de la fibration p. Un champ métabolique peut être ainsi défini : à tout point $u \in D$ est associé un champ $X(u)$ sur la fibre M ; on a donc une application G de la base D dans l'espace D(M) des champs de vecteurs sur M. Le champ $X(u)$ est défini par un système différentiel $dm/dv = X(m ; u)$.

On admet, dans cette formule, que la variation de X en fonction de u est lente, eu égard au module de X. Le paramètre v doit être considéré comme un « *temps local* », en principe différent du temps macroscopique observable qui paramétrise l'axe T. On exprime ainsi le fait — assez général en pratique — que les évolutions locales sont beaucoup plus rapides que l'évolution globale de la

morphologie, qui n'en retient que les accidents de grande échelle.

Définition 8. État local du processus.

Il est défini par une section s de la fibration $p : E \longrightarrow D$, qui à tout point $u \in D$ associe le représentant de l'état local en u dans la fibre $M(u) = p^{-1}(u)$. Cette section sera supposée définie et différentiable sur D, à l'exception d'un ensemble $K \subset D$, l'ensemble de catastrophe.

Une telle présentation est (sauf peut-être sur K) déterministe. On obtiendra une présentation plus réaliste — à caractère thermodynamique — en substituant à la section $s(u)$ son état asymptotique dans la dynamique fibre. Admettant alors la conjecture spectrale, et que le champ $G(u)$ est de type générique, l'ensemble limite $\omega(s(u))$ sera un attracteur structurellement stable (au point de vue topologique), qu'on notera $\overline{s(u)}$. Par suite, cet attracteur est également défini pour les champs voisins, et, par continuité, la valeur de $\overline{s(u')}$, pour u' régulier assez voisin de u, est l'attracteur déformé de $\overline{s(u)}$ quand on passe du champ $G(u)$ au champ $G(u')$. Ainsi, à tout attracteur des champs « génériques » du champ métabolique G, on peut associer son « domaine », dans D, qui est l'ensemble des points u de D tels que $\overline{s(u)}$ soit cet attracteur. On ne confondra pas le *domaine* d'un attracteur, qui est un ouvert de la base D, avec son *bassin*, qui est un ouvert de la fibre M des « états internes ».

En un point k de l'ensemble de catastrophe K, la section $\bar{s}(k)$ n'est pas en principe définie. On peut cependant, si l'on veut, définir $\bar{s}(k)$ comme un ensemble seuil séparant les bassins des attracteurs qui sont en compétition en k. Pour une telle section on a la propriété de semi-continuité :

$$\lim s(k') \subset s(k) \quad \text{si} \quad k' \text{ tend vers } k.$$

A partir de la donnée du champ métabolique G, et de la donnée initiale de s sur $t = 0$, il n'est pas possible, en général, de préciser la nature et la position de l'ensemble catastrophique K. Dans le cas où le champ G est un

champ de potentiels, on pourra cependant donner des règles plus ou moins motivées (convention de Maxwell) qui permettent de définir l'ensemble K.

2.8. La bifurcation.

Désignons par Σ l'ensemble exceptionnel des champs de D(M) qui ne vérifient pas la conjecture spectrale. Dans le cas des dynamiques de gradient Σ est une hypersurface avec singularités dans D(M) : elle présente une structure stratifiée, telle qu'en chaque point d'une strate de codimension finie, on a un modèle local pour la section transverse défini par un ensemble semi-algébrique. La section s étant donnée pour $t < t_1$, il peut arriver que sur un point u de $t = t_1$ l'attracteur $\overline{s(u)}$ cesse d'être structurellement stable ; alors $G(u)$ est un champ de Σ. On voit donc qu'une partie de l'ensemble de catastrophe K est définie par le fait que $G(u)$ est dans Σ, l'attracteur $\overline{s(u)}$ devenant instable. Ce phénomène — destruction d'un attracteur par variation du champ, et son remplacement par de nouveaux attracteurs — est connu en Dynamique Qualitative sous le nom de *bifurcation* (terminologie, qui semble-t-il, remonte à Jacobi : allemand *Abzweigung*).

L'attracteur $A = \overline{s(u)}$ étant détruit par bifurcation, un certain nombre d'attracteurs — voisins ou lointains — apparaissent pour se partager son bassin ; ces attracteurs héritiers vont se partager le domaine voisin de u pour $t > t_1$. La compétition entre ces héritiers donne naissance à une morphologie d'ondes de choc dans D. En pareil cas, on peut parfois admettre que ce partage entre domaines est défini par une caractéristique intrinsèque du champ $X \subset D(M)$. (Ce sera le cas de la convention de Maxwell décrite ci-dessous). Alors, à la strate de bifurcation σ de Σ est attachée une strate de catastrophe universelle J dans D(M). (En termes imagés la *bifurcation engendre la catastrophe*).

Si l'application G qui définit le champ métabolique est transversale sur la strate S de bifurcation, et sur l'ensemble

stratifié J de conflit qui lui est associé, alors l'ensemble de catastrophe local K est défini par l'image réciproque $G^{-1}(J)$; en tant que section transversale de l'ensemble stratifié J, il admet par suite un modèle local (en général semi-analytique). On s'explique ainsi que la morphologie locale puisse être donnée par un *champ morphogénétique* local, une *chréode*.

2.9. Cas des gradients.

On suppose cette fois que la dynamique locale $X(u)$ est définie par un potentiel $X(u) = -\operatorname{grad}_m V(m\,;\,u)$, $m \in M$, $u \in D$. Les champs de gradients ont en effet des propriétés simples : il n'y a pas de récurrence, toute trajectoire va d'un point critique de V à un autre point critique. Presque toute trajectoire aboutit à un minimum — qui, en général, est quadratique non dégénéré. La décomposition de la variété M en bassins est localement relativement simple : les bassins sont séparés par des hypersurfaces à singularités, qui peuvent comporter des « cusps » du type $y = x^\alpha$ (à plusieurs dimensions, s'il le faut).

Un autre avantage de l'hypothèse des gradients est de substituer à l'étude — encore compliquée et mal connue — des champs de vecteurs, l'étude des fonctions potentiels. On est ainsi ramené à étudier les bifurcations possibles des minima d'une fonction numérique — problème qui est, dans l'état actuel de la technique, résolu par la théorie du « déploiement universel », objet du chapitre suivant.

En tout point $u \in D$, le régime local associé est défini par l'un des attracteurs de $X = \operatorname{grad}_m V(m\,;\,u)$, c'est-à-dire l'un des minima du potentiel V. Or, en général, V admet plusieurs minima, en sorte que règne une certaine indétermination pour le choix du régime stable qui l'emporte en u. Une règle simple, pour lever cette indétermination, est la :

Convention de Maxwell.

En tout point u D, le régime local est défini par le *minimum absolu* de la fonction $V(m\,;\,u)$.

Ce minimum absolu μ est en général quadratique non dégénéré, donc structurellement stable. Il existera donc un ouvert $U \subset D$ sur lequel μ va l'emporter. L'extension du domaine U sera arrêtée dans deux circonstances :

(i) Le minimum μ, toujours défini et stable, cesse d'être un minimum absolu, un autre minimum μ' devenant inférieur. Au point v de U, ces deux minima ont des valeurs égales. On dit alors que v appartient à une *strate de conflit*.

(ii) Ou le minimum μ devient structurellement instable ; le point v appartient alors à une *strate de bifurcation*.

Ces strates sont images réciproques de strates correspondantes dans l'espace fonctionnel L (M ; R) des fonctions C^∞ sur M à valeurs réelles. Dans cet espace, les strates de conflit sont de codimension un, et ont dans leur bord les strates de bifurcation, qui sont au moins de codimension deux.

La convention de Maxwell (ainsi nommée parce que c'est grâce à elle qu'on détermine le palier horizontal de la courbe (isotherme) de Van der Waals), par son caractère algébrique trop commode s'écarte souvent de la réalité physique. C'est ainsi qu'on pourrait évaluer la stabilité globale d'un minimum par d'autres fonctions, par exemple : le volume global de son bassin, ou encore, l'altitude relative du seuil le plus bas à la frontière du bassin. Le choix d'une telle fonction, à la place de la convention de Maxwell, a une certaine incidence — en général minime — sur la topologie de l'ensemble de conflit.

Un reproche plus grave peut être fait à ce genre de règles ; elles négligent complètement les phénomènes — souvent observés — de *retard* ou *d'hystérésis*. Dans certains cas, on peut avoir un *retard parfait:* un minimum subsiste tant que son bassin n'est pas totalement détruit par bifurcation.

EXEMPLE : *La catastrophe de Riemann-Hugoniot.*

La variété M est ici de dimension un (axe Ox) ; sur un espace D de dimension deux (coordonnées u, v), on a le potentiel :

$$V = x^4/4 + ux^2/2 + vx.$$

L'ensemble des points critiques de V est défini par :

$$\partial V/\partial x = x^3 + ux + v.$$

Le discriminant de cette équation du troisième degré est

$$4u^3 + 27v^2 = 0.$$

Il y a trois racines (deux minima) à l'intérieur la parabole semi-cubique $4\ u^3 + 27\ v^2 < 0$. La convention de Maxwell donne pour ensemble de confiit le demi-axe $v = 0$, $u = 0$; l'origine est la strate de bifurcation ; le minimum $V = xf\,y$ est instable. Si l'on adopte la convention de « retard parfait », le régime régnant en un point (u, v) dépend de l'histoire de ce point. Par exemple si on décrit une parallèle à Ov $(u = -k^2)$ dans le sens des v croissants, le régime local associé aux v négatifs (unique si v est assez grand) subsistera jusqu'à la branche supérieure de la parabole semi-cubique :

$$v = 2t^3$$
$$u = -3t^2 \quad t > 0 \quad \text{(Fig. 1).}$$

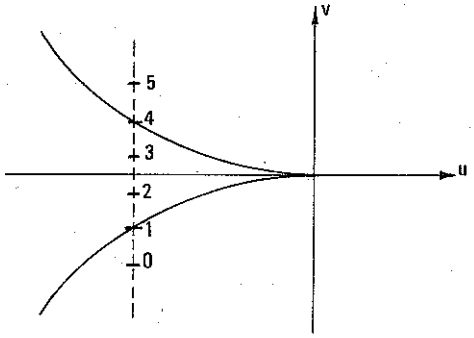
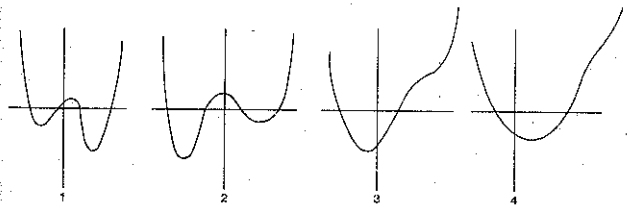


Figure 1.



QUELQUES RÉFÉRENCES BIBLIOGRAPHIQUES

Généralités sur les systèmes dynamiques.

R. Abraham. — Foundations of mechanics (Benjamin, 1967).
C. Godbillon, Systèmes différentiels et Mécanique Analytique (Hermann, 1969).

Systèmes hamiltoniens et trajectoires fermées centrales.

Arnold et Avez. — Problèmes ergodiques en Mécanique Classique (Gauthier-Villars, 1967).

Points critiques et systèmes gradients.

R. Thom. — Sur une partition en cellules associée à une fonction sur une variété (C. R., Paris, 14 mars 1949).

Ensembles stratifiés et applications y *transversales.*

R. Thom. — Ensembles et morphismes stratifiés (Bull. Amer. Math. Soc., March 1969).