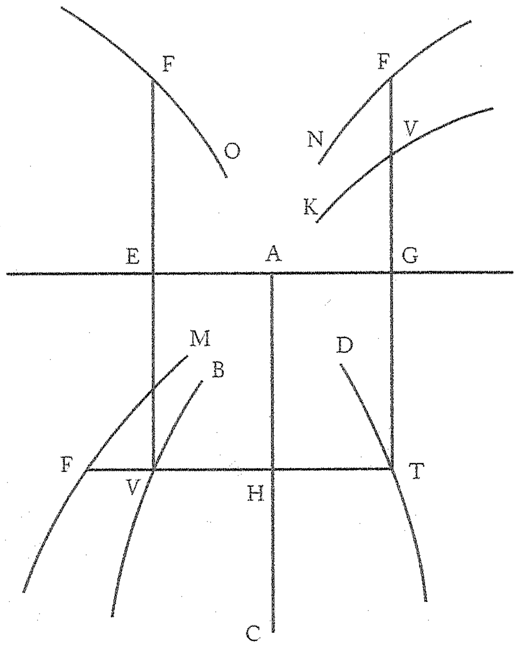
Pour résoudre ce problème, Varignon se donne les différentes variables nécessaires et matérialise leurs rapports à l'aide d'un graphique dont la construction, dans son principe, est identique à celle présentée dans le mémoire du 5 juillet 1698. Dans les *Mémoires de l'Académie Royale des Sciences*, cette nouvelle étude de Varignon s'ouvre donc en ces termes :




« ***Tous les angles rectilignes*** étant droits dans la figure que voicy, soient six courbes quelconques TD, VB, FM, VK, FN, FO, dont les trois premières expriment par leur abscisse commune AH, l'espace parcouru par un corps quelconque mû comme l'on voudra le long de AC. Soit de même le temps employé à le parcourir, exprimé par l'ordonné correspondante HT de la courbe TD ; la vîtesse de ce corps en chaque point H, par les ordonnées aussi correspondantes VH, VG, des courbes VB, VK ; ce qu'il a de force vers C, à chaque point H, indépendamment de sa vîtesse (je l'appelleray dorénavant Force centrale à cause de sa tendance au point C comme centre), s'exprimera de même par des ordonnées correspondantes encore FH, FG, FE, des courbes FM, FN, FO. »

(Pierre Varignon, « Manière générale de déterminer les forces, les vitesses, les espaces, les temps, une seule de ces quatre choses étant donnée dans toutes sortes de mouvemens rectilignes variés à discrétion », *Mémoires de l'Académie Royale des Sciences*, 30 janvier 1700.)

Dans la suite de son texte, Varignon nomme ces six courbes fondamentales TD, VB, FM, VK, FN et FO respectivement (nous rappelons que le corps décrit d'un mouvement rectiligne quelconque AC) :

« ***[...] la courbe TD,*** à laquelle les ordonnées HT se terminent en T, s'appellera la courbe des temps » (les abscisses sont AH) ;

« Les deux courbes VB, VK, auxquelles les ordonnées correspondantes et égales VH, VG, se terminent en V, s'appelleront les courbes des vitesses » (les abscisses sont respectivement AH et AG ou HT).

(*Ibid.*)

Les courbes VB et VK correspondent à ce que nous avons appelé dans notre présentation du mémoire du 5 juillet 1698 les premier et deuxième diagrammes des vitesses.

« ***Enfin les trois courbes*** FM, FN, FO, auxquelles les ordonnées correspondantes encore et égales FH, FG, FE se terminent en F, s'appelleront les courbes des forces. » (Les abscisses sont respectivement AH, HT ou AG, et VH ou EA).

(*Ibid.*)

En résumé, nous pouvons dire, dans un langage légèrement modernisé, que la courbe TD exprime les variations de l'espace AH en fonction du temps HT ; la courbe VB celles de l'espace AH en fonction de la vitesse VH ; la courbe VK celles du temps AG en fonction de la vitesse VG ; la courbe FM celles de l'espace AH en fonction de la force centrale FH ; la courbe FN celles du temps AG en fonction de la force centrale FG ; et enfin, la courbe FO celles de la vitesse EA en fonction de la force centrale FE.

Varignon associe alors à chacune des quatre variables, espace, temps, vitesse et force, un symbole algébrique déterminé :

« ***[...] soient les espaces*** parcourus AH = $x$, les temps employés à les parcourir HT = AG = $t$, les vîtesses en H (que j'appelleray finales) HV = AE = GV = $v$, les forces centrales correspondantes HF = EF = GF = $y$. »

(*Ibid.*) .

Michel BLAY – (pages 203 et suivantes)
La science du mouvement.
De Galilée à Lagrange – BELIN SUP – 2002

À l'issue de cette procédure d'algébrisation, Varignon est en mesure de mettre en place les concepts cinématiques nécessaires pour la suite de son investigation des forces centrales dans le cas des mouvements rectilignes :

> « ***De là on aura dx*** pour l'espace parcouru comme d'une vitesse uniforme $v$, à chaque instant ; $dv$ pour l'accroissement de vitesse qui s'y fait ; $ddx$ pour ce qui se parcourt d'espace en vertu de cet accroissement de vîtesse ; et $dt$ pour cet instant.
>
> A ce compte, la vîtesse ne consistant que dans un rapport d'espace parcouru d'un mouvement uniforme, au temps employé à le parcourir, l'on aura déjà $v = \frac{dx}{dt}$ pour une première Règle, laquelle donnera $dv = \frac{ddx}{dt}$ en faisant $dt$ constante. »
>
> (*Ibid.*)

Varignon se trouve donc maintenant en possession de deux expressions différentielles, relatives au concept de vitesse :

- d'une part, celle de la vitesse dans chaque instant : $v = \frac{dx}{dt}$ ;
- d'autre part, celle de l'accroissement de cette même vitesse pendant le même instant $dt$ : $dv = \frac{ddx}{dt}$.

De fait, le mouvement varié peut être interprété comme la résultante à chaque instant d'un mouvement uniforme de vitesse $v$, égale à la vitesse totale acquise lors de l'intervalle de temps précédent, et d'un mouvement également uniforme de vitesse $dv$, vitesse acquise dès le début de l'intervalle de temps $dt$. Cette deuxième vitesse peut être négligée par rapport à la première à l'intérieur de l'intervalle de temps $dt$.

La mise en place des expressions différentielles relatives à la force centrale va pour sa part s'appuyer sur le modèle galiléen de la chute des corps :

> « ***De plus les espaces*** parcourus par un corps mû d'une force constante et continuellement appliquée, telle qu'on conçoit d'ordinaire la pesanteur, étant en raison composée de cette force et des quarrés des temps employés à les parcourir ; l'on aura aussi $ddx = ydt^2$ ou $y = \frac{ddx}{dt^2} = \frac{dv}{dt}$. Ce qui fait encore une Règle $y = \frac{dv}{dt}$, qui avec la précédente $v = \frac{dx}{dt}$, satisfait à tout ce qu'on se propose icy de résoudre. »
>
> (*Ibid.*)

Varignon adopte ici la conceptualisation de la force accélératrice proposée par Newton dans les *Principia* (voir *infra* partie II, chapitre 5). La comparaison de la première phrase du texte varignonien avec l'énoncé du lemme X de Newton est dans cette perspective tout à fait révélatrice :

> « ***Les espaces qu'une force*** finie fait parcourir au corps qu'on presse, soit que cette force soit déterminée et immuable, soit qu'elle augmente ou diminue continuellement, sont dans le commencement du mouvement en raison doublée des temps. »
>
> (Isaac Newton, *Philosophiae Naturalis Principia Mathematica*, Lemme X, Section I, Livre I, traduction de la Marquise du Chastelet.)

Le corollaire 3 de ce lemme stipule en outre :

> « ***Corollaire 3.*** Il en est de même des espaces quelconques que les corps pressés par des forces diverses décrivent. Ces espaces sont encore dans le commencement du mouvement, comme les forces multipliées par les quarrés des temps. »
>
> (*Ibid.*)

En conséquence, puisque pendant l'intervalle du temps $dt$ la force, supposée « *constante et continuellement appliquée* », engendre l'accroissement d'espace égal à $ddx$, nous pouvons écrire en suivant strictement Varignon :

$$ddx = y\,dt^2 \quad \text{ou} \quad y = \frac{ddx}{dt^2}$$

soit

$$y = \frac{ddx}{dt \cdot dt} \quad \text{or} \quad dv = \frac{ddx}{dt}$$

d'où $y = \frac{dv}{dt}$.

Cependant, comme nous avons noté précédemment que la variation de vitesse $dv$, en raison de la forme de son expression, doit apparaître dès le début de l'intervalle de temps $dt$, il faut donc bien considérer dans ce cas qu'une force agit instantanément au début de cet intervalle de temps $dt$ puis n'agit plus jusqu'au début de l'intervalle de temps suivant. Dans cette perspective, l'expression de « force constante et continuellement appliquée » met à jour certains problèmes sous-jacents afférents à l'engendrement et à la nature du mouvement. Ces difficultés peuvent être mises en évidence de la manière suivante en revenant sur l'expression de l'accroissement de vitesse : dans le cas où la force agirait effectivement continuellement et de façon constante pendant l'intervalle de temps $dt$, de telle sorte que l'accroissement de vitesse acquis à la fin de cet intervalle de temps soit encore $dv$, l'espace parcouru ne serait plus $ddx$ mais $1/2\ ddx$. Varignon parvient néanmoins au résultat attendu car, lors du passage d'une proportionnalité à une égalité, dans l'expression de la force, il néglige de prendre en compte le coefficient de proportionalité.

En nous exprimant de façon légèrement différente et en nous plaçant dans la perspective de la détermination de l'expression de la force, nous pouvons dire que les difficultés de la conceptualisation varignonienne résident principalement dans le fait que l'expression de l'accroissement de vitesse $dv$ et celle de la force

$y$ impliquent, si nous pouvons nous exprimer ainsi, une modélisation ambiguë du mode d'action de la force, en ce sens que celle-ci est censée agir, suivant l'expression que Varignon s'efforce de déterminer, soit au tout premier instant (c'est une conséquence implicite des manipulations strictement mathématiques conduisant à l'expression de $dv$), soit de façon constante et continue pendant tout l'intervalle de temps $dt$ (c'est l'hypothèse explicite relative au calcul de $y$).

Finalement, on peut reprocher à Varignon, quant à la cohérence de sa conceptualisation, de n'avoir pas approfondi de façon rigoureuse la construction du concept d'accroissement de vitesse et de s'être sans doute laissé entraîner par l'immense plaisir qu'il prenait à «faire tourner» le nouveau calcul, en ne considérant que la procédure mathématique consistant à «*faire dt constante*» puisque le temps coule uniformément.

Il apparaît donc ici que, tout en parvenant à une expression satisfaisante de $y$, Varignon laisse malheureusement en suspens un certain nombre de questions tant techniques que conceptuelles qui seront reprises entre autres par Auguste Comte dans la dix-septième leçon de *Philosophie première, Cours de philosophie positive, leçons 1 à 45*.

L'expression générale de la force centrale dans le cas des mouvements rectilignes étant maintenant, si l'on peut dire, acquise, Varignon est en droit d'énoncer, dans son mémoire du 30 janvier 1700, ce qu'il appelle les «Règles générales des mouvemens en lignes droites»:

$$\text{«}1°.\ v = \frac{dx}{dt} \quad 2.\ y = \frac{dx}{dt}\left(\frac{ddx}{dt^2}\right).\text{»}$$

Que nous révèlent ces «Règles générales»? Très précisément que les concepts de vitesse dans chaque instant et de force accélératrice dans chaque instant, qui viennent successivement d'être construits par Varignon, peuvent en fait être déduits l'un de l'autre par un simple calcul mettant en œuvre les algorithmes leibniziens, et qu'en conséquence:

> «***d'après ces formules,*** toutes les questions relatives à cette théorie préliminaire du mouvement varié se réduiront immédiatement à de simples recherches analytiques, qui consisteront ou dans des différentiations, ou, le plus souvent, dans des intégrations.»
>
> (Auguste Comte, *Philosophie première, Cours de philosophie positive, leçons* 1 à 45, Leçon 17, Paris, Hermann, 1975.)

Après avoir énoncé ses règles générales, Varignon en fixe l'usage dès les lignes suivantes:

> «*Usage.* Je dis présentement qu'une des six courbes cy-dessus étant donnée à discrétion, on pourra toujours en déduire les cinq autres par le moyen de ces deux Règles, supposé les résolutions et les intégrations nécessaires des égalités en question.»
>
> (Pierre Varignon, «Manière générale de déterminer les forces, les vitesses, les espaces, les temps, une seule de ces quatre choses étant donnée dans toutes sortes de mouvemens rectilignes variés à discrétion», *Mémoires de l'Académie Royale des Sciences*, 30 janvier 1700.)

Puis, à l'issue de l'étude de deux exemples, fort simples, Varignon conclut sur la généralité de sa méthode:

> «*Les mêmes choses* se trouveront de la même manière dans toutes autre hypothèse; il n'y aura de différence que la difficulté du calcul laquelle n'auroit fait qu'embarasser icy. Ainsi ces deux exemples suffisent.»
>
> (*Ibid.*)