TD 1 : Calcul différentiel

Raphaël Alexandre et Elisha Falbel

Vendredi 13 janvier 2023

Exercice 1

Nous commençons par travailler autour de la dérivation de Lie. Soit X et Y deux champs de vecteurs

(1) Rappeler comment on calcule $X(f)$ si f est une fonction.

(2) Montrer en calculant le commutateur des flots que :

$$[X,Y] = X(Y) - Y(X). \tag{1}$$

Nous prenons maintenant la définition algébrique de la dérivée de Lie, L_X, pour les formes différentielles :

(i) L_X est une application **R**-linéaire sur l'ensemble des formes différentielles ;

(ii) $L_X(f) = X(f)$ pour les fonctions f ;

(iii) $L_X(\alpha \wedge \beta) = L_X(\alpha) \wedge \beta + \alpha \wedge L_X(\beta)$;

(iv) L_X et d commutent.

Alors :

(1) Montrer qu'un tel opérateur L_X est nécessairement unique.

(2) Montrer que sur les formes différentielles $L_X = \mathrm{d} \circ \iota_X + \iota_X \circ \mathrm{d}$ (formule de Cartan).

(3) En déduire que L_X ne peut pas être un tenseur.

Exercice 2

Le but de cet exercice est de manipuler la formule de Cartan :

$$\mathrm{d}\phi(X,Y) = X(\phi(Y)) - Y(\phi(X)) - \phi([X,Y]), \tag{2}$$

où ϕ est une 1-forme et sont X, Y deux champs de vecteurs.

(1) Vérifier la formule sur $\phi = x\,\mathrm{d}y$.

(2) Montrer la formule générale.

(3) Est-ce que $\mathrm{d}\phi(X,Y) = 0$ si $\phi(X)$ et $\phi(Y)$ sont constants ? Trouver un exemple.

Exercice 3

Cet exercice se penche sur le lemme de Cartan.

(1) Montrer que si α, β sont deux 1-formes jamais nulles telles que $\alpha \wedge \beta = 0$ alors $\beta = f\alpha$ pour une fonction f.

(2) Montrer la généralisation suivante. Si $(\alpha^1, \dots, \alpha^n)$ est une famille libre de 1-formes et si $(\beta^1, \dots, \beta^n)$ sont des 1-formes telles que

$$\sum_{i=1}^{n} \alpha^i \wedge \beta^i = 0, \tag{3}$$

alors il existe des fonctions f_{ij} telles que $f_{ij} = f_{ji}$ et

$$\beta^i = \sum_{j=1}^{n} f_{ij}\alpha^j. \tag{4}$$

(3) Montrer l'autre généralisation suivante. Si β est une n-forme et α est une 1-forme jamais nulle vérifiant $\alpha \wedge \beta = 0$ alors $\beta = \theta \wedge \alpha$ avec θ une $(n-1)$-forme.

Exercice 4

Soit M une variété de dimension 3. Une 1-forme θ est *de contact* si en tout point :

$$d\theta \wedge \theta \neq 0. \tag{5}$$

(1) Vérifier que c'est une condition naturelle.
(2) Trouver un exemple de forme θ.
(3) Donner une base de $\ker\theta$.
(4) Montrer que $\ker\theta$ est une distribution non intégrable en tout point.
(5) Est-il possible de trouver un champ de vecteurs Z tel que $d\theta(Z,\cdot) = 0$ et $\theta(Z) = 1$? (C'est un champ de Reeb.)
(6) Peut-on trouver un unique champ de Reeb à partir d'une distribution de contact ?

Exercice 5

Soit V_1 et V_2 deux champs de vecteurs sur $\mathbf{R}^2$ en tout point linéairement indépendants. Montrer qu'il existe en tout point une carte $\phi\colon U \to \mathbf{R}^2$ telle que $\langle\phi_*(V_1)\rangle = \langle\frac{\partial}{\partial x}\rangle$ et $\langle\phi_*(V_2)\rangle = \langle\frac{\partial}{\partial y}\rangle$.