TD 2 : Groupes et algèbres de Lie

Raphaël ALEXANDRE et Elisha FALBEL

Vendredi 20 janvier 2023

EXERCICE 1

Ici, $\mathbf{K} \in \{\mathbf{R}, \mathbf{C}\}$.

(1) Pour une base choisie, on identifie $\mathscr{M}(\mathbf{K}^n)$ aux matrices exprimées dans cette base. Calculer les algèbres de Lie de :

$$\mathrm{GL}_n(\mathbf{K}) = \left\{M \in \mathscr{M}(\mathbf{K}^n) \,\middle|\, \det M \neq 0\right\}, \tag{1}$$

$$\mathrm{SL}_n(\mathbf{K}) = \left\{M \in \mathscr{M}(\mathbf{K}^n) \,\middle|\, \det M = 1\right\}, \tag{2}$$

$$\mathrm{O}(n) = \left\{M \in \mathscr{M}(\mathbf{R}^n) \,\middle|\, {}^tMM = \mathrm{id}\right\}, \tag{3}$$

$$\mathrm{U}(n) = \left\{M \in \mathscr{M}(\mathbf{C}^n) \,\middle|\, {}^t\overline{M}M = \mathrm{id}\right\}. \tag{4}$$

(2) Avec

$$J = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & I_n & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \tag{5}$$

vérifier que J est une forme hermitienne de signature $(n+1, 1)$, et calculer les algèbres de Lie de :

$$\mathrm{O}(4,1) = \left\{M \in \mathscr{M}(\mathbf{R}^6) \,\middle|\, {}^tMJM = J\right\}, \tag{6}$$

$$\mathrm{U}(2,1) = \left\{M \in \mathscr{M}(\mathbf{C}^3) \,\middle|\, {}^t\overline{M}JM = J\right\}. \tag{7}$$

EXERCICE 2

Le but de l'exercice est de manipuler le groupe affine. On considère $\mathrm{Aff}(\mathbf{R}^n) = \mathbf{R}^n \rtimes \mathrm{GL}_n(\mathbf{R})$ le groupe affine agissant sur $\mathbf{R}^n$. Si T est une transformation affine, alors il existe $c \in \mathbf{R}^n$ et $f \in \mathrm{GL}_n(\mathbf{R})$ tel que $T(x) = c + f(x)$.

(1) Montrer que l'inclusion $\mathrm{Aff}(\mathbf{R}^n) \to \mathrm{GL}_{n+1}(\mathbf{R})$ (avec une représentation matricielle) donnée par :

$$(c, f) \mapsto \begin{pmatrix} f & c \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{8}$$

est un morphisme de groupes.

(2) À travers ce morphisme, calculer l'algèbre de Lie de $\mathrm{Aff}(\mathbf{R}^n)$ et identifier chacun des facteurs de $\mathbf{R}^n \oplus \mathfrak{gl}_n = \mathfrak{aff}_n$.

(3) Avec $f \in \mathfrak{gl}_n(\mathbf{R}) \subset \mathfrak{aff}_n(\mathbf{R})$ et $x \in \mathbf{R}^n \subset \mathfrak{aff}_n(\mathbf{R})$, calculer $[f, x]$. Calculer aussi $[\mathbf{R}^n, \mathbf{R}^n]$ avec $\mathbf{R}^n \subset \mathfrak{aff}_n(\mathbf{R})$.

EXERCICE 3

On considère le groupe des isométries euclidiennes, $\mathrm{Euc}_n(\mathbf{R}) = \mathbf{R}^n \rtimes \mathrm{O}(n) \subset \mathrm{Aff}_n(\mathbf{R})$. On considère par ailleurs le groupe $\mathrm{O}(n+1)$.

(1) Montrer que $\mathrm{O}(n+1)$ agit transitivement sur la sphère S^n. Montrer que l'isotropie est isomorphe à $\mathrm{O}(n)$.

(2) Montrer par calcul que l'on a une décomposition $\mathfrak{o}_{n+1} = \mathfrak{o}_n \oplus \mathbf{R}^n$.

(3) Trouver un isomorphisme linéaire $\mathfrak{euc}_n \to \mathfrak{o}_{n+1}$ qui identifie les facteurs $\mathfrak{o}_n$ et $\mathbf{R}^n$.

(4) On prend maintenant $n = 2$ pour procéder à des calculs simples. Avec $u, v \in \mathbf{R}^2$, calculer $[u, v]$ dans chacune des algèbres $\mathfrak{euc}_2$ et $\mathfrak{o}_3$.

(5) Interpréter géométriquement et calculer

$$-\langle [e_1, e_2]e_2, e_1\rangle \tag{9}$$

dans la base canonique de $\mathbf{R}^2$.

(6) Répéter l'exercice avec $\mathrm{O}(n, 1)$ et l'espace hyperbolique.

Exercice 4

Soit $\mathfrak{g}$ une algèbre de Lie.

(1) Soit M_1 et M_2 deux variétés lisses. Rappeler l'identification canonique $\mathrm{T}(M_1 \times M_2) \cong \mathrm{T}M_1 \oplus \mathrm{T}M_2$.

(2) Soit α et β deux formes différentielles à valeurs dans $\mathfrak{g}$. Rappeler le sens de $[\alpha \wedge \beta]$.

(3) Soit α une 1-forme à valeurs dans $\mathfrak{g}$. Vérifier :

$$[\alpha \wedge \alpha](X, Y) = 2[\alpha(X), \alpha(Y)] \tag{10}$$

(4) Sur le groupe affine $\mathrm{Aff}(\mathbf{R}^2)$ et sa forme de Maurer-Cartan $\omega_{\mathrm{Aff}(\mathbf{R}^2)}$, écrire matriciellement dans $\mathrm{GL}(3, \mathbf{R})$ la forme de Maurer-Cartan et l'équation de structure

$$\mathrm{d}\omega_{\mathrm{Aff}(\mathbf{R}^2)} + \frac{1}{2}\left[\omega_{\mathrm{Aff}(\mathbf{R}^2)} \wedge \omega_{\mathrm{Aff}(\mathbf{R}^2)}\right] = 0. \tag{11}$$

Exercice 5

On considère un groupe de Lie G. On désigne $\mu \colon G \times G \to G$ la loi de groupe. On désigne par $L_g \colon G \to G$ l'application $\mu(g, \cdot)$ et par $R_g \colon G \to G$ l'application $\mu(\cdot, g)$.

(1) Rappeler la définition de la forme de Maurer-Cartan de G, que nous désignerons ω_G. Calculer $L_g^*\omega_G$ et $R_g^*\omega_G$ pour $g \in G$ fixé.

(2) Calculer $\mu^*\omega_G$.

(3) Calculer dAd (en tout point $g \in G$).

(4) Calculer $\mathrm{d}(\mathrm{Ad}(\psi)^{-1}\alpha)$ pour toute fonction ψ à valeurs dans G et toute 1-forme α à valeurs dans $\mathfrak{g}$.

Exercice 6

À nouveau, G agit sur $X = {}^{G}\!/_{H}$. On désigne par ω_G la forme de Maurer-Cartan de G, ω_H celle de H et ψ une fonction à valeurs dans H.

(1) Rappeler pourquoi

$$\omega_G = \mathrm{Ad}(\psi)\left(R_\psi^*\omega_G - \psi^*\omega_H\right). \tag{12}$$

(2) Vérifier en substituant ω_G par le membre de droite de l'équation précédente l'équation de structure :

$$\mathrm{d}\omega_G + \frac{1}{2}[\omega_G \wedge \omega_G] = 0. \tag{13}$$