TD 3 : Connexions de Cartan

Raphaël ALEXANDRE et Elisha FALBEL

Vendredi 3 février 2022

EXERCICE 1

Dans cet exercice on décrit la sphère S^2 conforme.

(1) Montrer que l'équation
$$2xt + y^2 + z^2 = 0 \tag{1}$$
définit dans $\mathbf{RP}^3$ une sphère S^2.

(2) Quel est le sous-groupe de $\mathrm{PGL}(4, \mathbf{R})$ préservant cette sphère ?

(3) Calculer le stabilisateur d'un point.

(4) Calculer les algèbres de Lie du groupe et du stabilisateur.

(5) Montrer que la sphère conforme n'est pas un espace homogène réductible.

EXERCICE 2

(1) Quel est le modèle géométrique de la géométrie riemannienne ?

(2) Quel est le fibré $P \to M$ à considérer qui permette de traduire le choix d'une métrique riemannienne sur M ?

(3) Avec la décomposition $\mathfrak{euc}_n = \mathfrak{o}_n \oplus \mathbf{R}^n$, décomposer la connexion et la courbure. À quoi correspondent la torsion et la courbure classique ?

À présent on considère le disque hyperbolique $\mathbf{H}^2 \subset \mathbf{R}^2$ défini par $x^2 + y^2 < 1$ et muni de la métrique riemannienne
$$\mathrm{d}s^2 = \frac{4(\mathrm{d}x^2 + \mathrm{d}y^2)}{(1 - (x^2 + y^2))^2}. \tag{2}$$
On rappelle que la connexion de Levi-Civita ∇ d'une variété riemannienne est l'unique connexion métrique sans torsion. On admet qu'il existe de même une unique connexion de Cartan euclidienne sans torsion qui correspond à $\mathrm{d}s^2$.

(1) Trouver un repère en chaque point, c'est-à-dire deux champs de vecteurs lisses X et Y tels que $(X, Y)(p)$ est orthonormé direct.

(2) Décrire la connexion sans torsion.

(3) Calculer la courbure de la connexion obtenue.

EXERCICE 3

Soit G/H un espace homogène et $P \to M$ un H-fibré à droite. Soit $U \subset M$ un ouvert tel qu'il existe une section lisse $\sigma \colon U \to P$. On dit que σ est une *jauge* ou encore, parfois, un *repère mobile*.

(1) Avec $M = G/H$ et le fibré principal $G \to G/H$, considerer deux jauges $\sigma_1, \sigma_2 \colon U \to G$. Calculer $\sigma_2^* \omega_G$ en fonction de $\sigma_1^* \omega_G$.

(2) Si (σ_i, U_i) est un recouvrement de M par des sections, à quelle condition des formes ω_i sur chaque U_i définissent-elles une connexion de Cartan ω_G telle que $\omega_i = \sigma_i^* \omega_G$?

Exercice 4

Cet exercice permet de montrer que l'unicité d'une solution permet parfois d'établir que la solution est bien une connexion. Soit G/H un espace homogène réductible affine : il existe une décomposition $\mathfrak{g} = \mathfrak{h} \oplus \mathbf{R}^n$ qui est $\mathrm{Ad}(H)$-invariante, avec $h \subset \mathfrak{gl}(n)$. (En géométrie affine, $[\mathbf{R}^n, \mathbf{R}^n] = 0$.) On considère $P \to M$ un H-fibré principal (de repères) sur M.

(1) Soit $\sigma \colon U \to P$ une jauge. Rappeler ce qu'est la forme $\theta_\sigma \colon \mathrm{T}U \to \mathbf{R}^n$.

(2) Désignons par $\alpha \colon U \to \mathfrak{h}$ une forme quelconque. Pour chaque jauge, il existe un problème différentiel :

$$\mathrm{d}\theta + [\alpha \wedge \theta] = 0. \tag{3}$$

Quelle est sa signification ?

(3) Supposons qu'il existe toujours une unique solution α_σ à ce problème, quelque soit la jauge. Montrer que $\omega_\sigma = \alpha_\sigma \oplus \theta_\sigma$ est un système compatible de connexions de Cartan jaugées. Quelle est la spécificité de la connexion de Cartan obtenue ?

Exercice 5

Soit ∇ une connexion affine sur M.

(1) Soit σ une jauge. On note $(X_1, \ldots, X_n)$ le repère mobile associé. Écrire les symboles de Christoffel en fonction de ∇ et des X_i.

(2) Quelle est la signification géométrique de la quantité exprimée ?

(3) On note θ^i le dual de X^i. Quel est le candidat naturel pour une connexion affine de Cartan jaugée qui corresponde à ∇ ?

(4) Montrer que l'on obtient effectivement un système compatible.

On procède maintenant à la réciproque. On considère l'espace affine et donc le modèle infinitésimal $\mathfrak{aff}_n = \mathfrak{gl}_n \oplus \mathbf{R}^n$. Soit $P \to M$ un espace généralisé affine de connexion de Cartan ω.

(5) Montrer que

$$\nabla_V(W) = V(\omega_{\mathbf{R}^n}(W)) + \left[\omega_{\mathfrak{gl}_n}(V), \omega_{\mathbf{R}^n}(W)\right] \tag{4}$$

définit univoquement une connexion affine au sens classique.

(6) Montrer que la courbure classique et la torsion de ∇ sont effectivement celles de ω.

(7) Si ω était euclidienne, ∇ serait-elle métrique ?