

UN ANALOGUE LOCAL DE L'INEGALITE DE PETROWSKY-OLEINIK

François LOESER

INTRODUCTION.

Dans son article récent [R], J.J. Risler a étudié un analogue local du théorème de Harnack. Il a démontré qu'une lissification d'un germe de courbe plane ne produit jamais plus de $\frac{1}{2}(\mu - r + 1)$ ovales et qu'un germe de courbe plane à tangentes distinctes admet toujours une lissification produisant $\frac{1}{2}(\mu - r + 1)$ ovales.

Nous donnons ici un analogue local de l'inégalité de Petrowsky-Oleinik pour les lissifications de germes de courbes planes réelles. Nous utilisons ici un résultat récent de Varchenko [V] et reprenons des méthodes introduites par Arnold [A1] et Kharlamov [K] dans la situation globale. Nous utilisons de façon essentielle le fait que la structure de Hodge mixte associée aux cycles évanescents d'une singularité isolée d'hypersurface est polarisée. Ceci nous permet de démontrer dans la troisième partie un analogue local de l'inégalité de Petrowsky-Oleinik pour les lissifications de singularités isolées d'hypersurfaces réelles de dimension paire. On en déduit le résultat pour les courbes par suspension. Dans la quatrième partie nous donnons, dans un cas très particulier, des congruences modulo 16 pour les M -lissifications de germes de courbes analogues à celles de Rokhlin [R01-2]. A notre connaissance, les structures de Hodge mixtes ont été introduites dans le contexte de la géométrie réelle par V.I. Arnold dans son article [A2].

Je tiens à remercier L. Guillou, A. Marin et J.J. Risler pour d'utiles discussions.

I. NOTATIONS.

I.1. Soit $Rf : (\mathbb{R}^{n+1}, 0) \rightarrow (\mathbb{R}, 0)$ un germe de fonction analytique dont le complexifié $f : (\mathbb{C}^{n+1}, 0) \rightarrow (\mathbb{C}, 0)$ est à singularité isolée. Soit $F : (\mathbb{C}^{n+1}, 0) \times (\mathbb{C}^p, 0) \rightarrow (\mathbb{C}, 0) \times (\mathbb{C}^p, 0)$ une déformation semi-universelle de f qui provient par complexification d'une déformation semi-universelle RF de Rf : si $R\varphi_1, \dots, R\varphi_p$ sur une base de $M_{\mathbb{R}^{n+1}, 0} / (Rf, \partial Rf / \partial x_0, \dots, \partial Rf / \partial x_n)$ avec $M_{\mathbb{R}^{n+1}, 0}$ l'idéal de l'origine dans \mathbb{R}^{n+1} , on pose

$$RF(x, u) = (Rf(x) + \sum_{i=1}^p u_i R\varphi_i(x), u)$$

et

$$F(x, u) = (f(x) + \sum_{i=1}^p u_i \varphi_i(x), u),$$

φ_i étant le complexifié de $R\varphi_i$.

Soit Σ le lieu critique de F . On choisit des représentants \tilde{f}, \tilde{F} et $\tilde{\Sigma}$ de f, F et Σ définis sur un polycylindre $\Delta_{n+1} \times \Delta_p$ voisinage de $(0, 0)$ dans $\mathbb{C}^{n+1} \times \mathbb{C}^p$ tels que :

- 1) $\delta\Delta_{n+1} \times \delta\Delta_p \cap \tilde{\Sigma} \neq \emptyset$;
- 2) $(\Delta_{n+1} \times \{0\}) \cap \tilde{\Sigma} = \{(0, 0)\}$;
- 3) pour tout u de Δ_p , $\tilde{F}^{-1}(0, u)$ intersecte $\delta\Delta_{n+1} \times \Delta_p$ transversalement.

Il existe alors un disque Δ_1 dans \mathbb{C} centré en zéro tel que pour tout (t, u) de $\Delta_1 \times \Delta_p$, $\tilde{F}^{-1}(t, u)$ est transverse à $\delta\Delta_{n+1} \times \delta\Delta_p$. On note $S = \Delta_1 \times \Delta_p$, $X = \tilde{F}^{-1}(S) \cap (\Delta_{n+1} \times \Delta_p)$, F la restriction de \tilde{F} à X , $\Sigma = \tilde{\Sigma} \cap X$, f la restriction de \tilde{f} à $X \cap (\mathbb{C}^{n+1} \times \{0\})$, Δ l'image de Σ dans S , $X(t, u) = F^{-1}(t, u) \cap X$, $X(t) = X(t, 0)$. Au-dessus de $S \setminus \Delta$, F est une fibration. Pour (t, u) dans $S \setminus \Delta$ on note I la forme d'intersection sur $H_n(X(t, u), \mathbb{R})$ et $s(f)$ la signature de I , pour n pair. On désigne par M l'isomorphisme de modromie agissant sur $H_n(X(t), \mathbb{R})$ pour t dans $\Delta_1 \setminus \{0\}$ et $\epsilon(f)$ la multiplicité de 1 comme valeur propre de M . Soit Λ l'ensemble des valeurs propres de M . On a une décomposition en sous-espaces propres $H_n(X(t), \mathbb{C}) = \bigoplus_{\lambda \in \Lambda} H_n(X(t), \mathbb{C})_\lambda$. On pose

$$H_n(X(t), \mathbb{C})_{\neq 1} = \bigoplus_{\lambda \in \Lambda \setminus \{1\}} H_n(X(t), \mathbb{C})_\lambda,$$

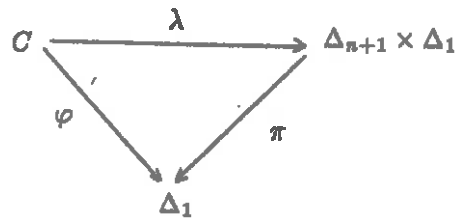
$$H_n(X(t), \mathbb{R})_{\neq 1} = H_n(X(t), \mathbb{R}) \cap H_n(X(t), \mathbb{C})_{\neq 1},$$

et

$$H_n(X(t), \mathbb{R})_1 = H_n(X(t), \mathbb{R}) \cap H_n(X(t), \mathbb{C})_1.$$

On définit de même $H_n(X(t), \mathbb{R})_{-1}$, etc.

I.2. Une lissification à un paramètre de $X(0)$ est la donnée d'un diagramme commutatif :

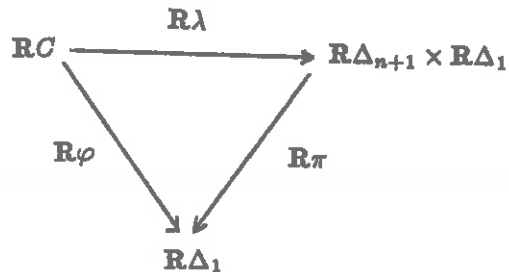


avec C un ensemble analytique (éventuellement singulier), λ et φ des applications analytiques, π la projection naturelle, vérifiant les conditions suivantes :

- i) Pour $t \in \Delta_1 \setminus \{0\}$, $C(t) = \varphi^{-1}(t)$ est lisse et la restriction de λ à $C(t)$ est un plongement de $C(t)$ dans $\Delta_{n+1} \times \{t\}$.
- ii) On a $C(0) = X(0)$ et la restriction de λ à $X(0)$ s'identifie à l'inclusion de $X(0)$ dans $\Delta_{n+1} \times \{0\}$.
- iii) Pour tout t dans Δ_1 , $C(t)$ est transverse à $\partial\Delta_{n+1} \times \{t\}$.

D'après la propriété universelle satisfaite par F , toute lissification à un paramètre de $X(0)$ s'obtient de la manière suivante : il existe une application analytique $\delta : \Delta_1 \rightarrow S$ avec $\delta(\Delta_1 \setminus \{0\}) \subset S \setminus \Delta$ telle que C s'identifie à $F^{-1}(\delta(\Delta_1))$ et λ, φ aux applications évidentes. Pour s dans Δ_1 , on note $X[s] = X(\delta(s))$.

I.3. Pour toute partie E de \mathbb{C}^N on note $\mathbb{R}E$ l'ensemble des points réels de E . On dit qu'une lissification à un paramètre de $X(0)$ est une lissification à un paramètre réelle de $\mathbb{R}X(0)$ si elle provient par extension des scalaires d'un diagramme commutatif :



avec $\mathbb{R}C$ un ensemble analytique réel, $\mathbb{R}\varphi$ et $\mathbb{R}\lambda$ des applications analytiques réelles et $\mathbb{R}\pi$ la projection naturelle. On a alors $\mathbb{R}\varphi^{-1}(0) = \mathbb{R}C(0) = \mathbb{R}X(0)$. Comme F est défini sur \mathbb{R} une telle lissification peut également s'obtenir en considérant une application analytique $\mathbb{R}\delta : \mathbb{R}\Delta_1 \rightarrow \mathbb{R}S$ telle que $\mathbb{R}\delta(\mathbb{R}\Delta_1 \setminus \{0\}) \subset \mathbb{R}S \setminus \mathbb{R}\Delta$.

I.4. Soit C une lissification réelle à un paramètre de $RX(0)$. Pour tout t de $R\Delta_1$ strictement positif, l'involution de C^{n+1} donnée par la conjugaison complexe induit une involution T^+ sur $H^n(X[t], \mathbb{R})$ et $H_n(X[t], \mathbb{R})$. On note $t(T^+, C)$ la trace de T^+ et si n est pair, $s(T^+, C)$ la signature de la forme bilinéaire symétrique $I(T^+, \cdot)$ sur $H_n(X[t], \mathbb{R})$. M agit sur $H_n(X[t], \mathbb{R})$, on définit comme en I.1 $H_n(X[t], \mathbb{R})_{\neq 1}$ et $H_n(X[t], \mathbb{R})_1$ et on note $s(T^+, C)_{\neq 1}$ la signature de la restriction de $I(T^+, \cdot)$ à $H_n(X[t], \mathbb{R})_{\neq 1}$. Dans le cas où C est la lissification standard $X[t] = X(t)$ on note $t(T^+)$, $s(T^+)$ et $s(T^+)_{\neq 1}$ les invariants précédents.

II. ENONCÉ DES RÉSULTATS.

II.1.

THÉORÈME II.1. Avec les notations de I, si $n = 2m$ est pair, on a :

a) pour $t > 0$ dans $R\Delta_1$: $\chi(RX(t)) - 1 = (-1)^n s(T^+)_{\neq 1} = t(T^+)$;

b) si C est une lissification réelle à un paramètre de $RX(0)$, on a pour tout $t > 0$ dans $R\Delta_1$:

$$i) \quad \chi(RX(t)) = 1 + t(T^+, C) ,$$

$$ii) \quad |\chi(RX(t)) - 1 - (-1)^m s(T^+, C)| \leq \epsilon(f) ,$$

$$iii) \quad |2(\chi(RX(t)) - 1)| \leq \mu + (-1)^{m+1} s(f) + \epsilon(f)$$

χ désignant la caractéristique d'Euler-Poincaré et μ le nombre de Milnor de f .

II.2. Supposons $n = 1$. Soit C une lissification réelle à un paramètre de $RX(0)$. Un ovale de $RC(t)$ est une composante connexe de $R(t)$ diffeomorphe à S^1 . Soit $Rg : R\Delta_2 \times R\Delta_1 \rightarrow R\Delta_1$ analytique telle que $Rg(\cdot, 0) = Rf(\cdot)$ et $RC(t)$ soit donné par $Rg(x, t) = 0$. Chaque ovale est une composante connexe du bord d'exactly deux composantes connexes de $R\Delta_2 \setminus RC(t)$. Comme $R\Delta_2$ est un disque, il y a une façon naturelle d'en appeler une extérieure et l'autre intérieure. Un ovale de $RC(t)$ est dit positif (resp. négatif) si $Rg(\cdot, t)$ est positif (resp. négatif) sur la composante intérieure. Pour t strictement positif fixé, on note P (resp. N) le nombre d'ovales positifs (resp. négatifs) de $RC(t)$.

On note $p + P$ (resp. $n' + N$) le nombre de composantes connexes de $R\Delta_2 \setminus RC(t)$ où $Rg(\cdot, t)$ est positif (resp. négatif), $t > 0$ étant fixé.

Soit $\bar{f} : (C^3, 0) \rightarrow (C, 0)$ défini par $\bar{f}(x, y, z) = f(x, y) + z^2$. On note $\bar{s}(f) = s(\bar{f})$: c'est la signature de la symétrisée de la forme de Seifert de l'entrelacement obtenu en intersectant $f = 0$ avec une petite sphère. Dans [N], W. Neumann a donné une formule pour $\bar{s}(f)$ en fonction de l'arbre dual de la singularité de $f = 0$. On note $\bar{\epsilon}(f) = \epsilon(\bar{f})$: c'est la multiplicité de -1 comme valeur propre de la monodromie de f . Cet invariant se calcule également à partir de l'arbre dual (cf. par exemple [N]).

Notre résultat est le suivant :

THÉORÈME II.2. Si $RX(0)$ est un bon représentant d'un germe de courbe plane (i.e. $n = 1$), si C est une lissification réelle à un paramètre de $RX(0)$, alors :

$$\left| N - P + \frac{1}{2}(n' - p) \right| \leq \frac{1}{4}(\mu - \bar{\nu}(f) + \bar{\tau}(f))$$

COROLLAIRE II.3. Si $RX(0)$ est localement irréductible en zéro, alors :

$$|N - P| \leq \frac{1}{4}(\mu - \bar{\nu}(f))$$

Démonstration: En effet dans ce cas $n' = p = 1$ et $\bar{\tau}(f) = 0$.

COROLLAIRE II.4. Si $RX(0)$ a r composantes irréductibles lisses en zéro, deux à deux transverses, alors :

$$(a) \quad \left| N - P + \frac{1}{2}(n - p') \right| \leq \frac{1}{2}(3k^2 - k - 1) = \frac{1}{8}(3r^2 - 2r - 8) \quad \text{si } r = 2k,$$

$$(b) \quad \left| N - P + \frac{1}{2}(n' - p) \right| \leq (3k^2 + k) = \frac{1}{8}(3r^2 - 4r + 1) \quad \text{si } r = 2k + 1$$

Remarque II.5 : Le théorème II.2 est optimal dans le cas (b) du corollaire II.4. En effet en spécialisant une courbe plane de degré r sur des droites se coupant en un seul point on en déduit l'inégalité de Petrowsky-Oleinik classique pour les courbes de degré impair ($[G]$) qui est optimale. Par contre nous ignorons si l'inégalité du théorème II.2 est optimale lorsque $\bar{\tau}$ est non nul.

III. DÉMONSTRATIONS.

III.1. Démonstration du théorème II.1 :

Démonstration de a) : L'égalité $\chi(\mathbf{R}X(t)) - 1 = (-1)^{m_s(T^+)_{\neq 1}}$ est démontrée par A. Varchenko dans [V], et dans le cas où I est non dégénérée par Gusein-Zade dans [G-Z]. Il nous suffit de montrer que $(-1)^{m_s(T^+)_{\neq 1}} = t(T^+)$.

Soit $H = H^n(X(t), \mathbf{R})$, $t > 0$ étant fixé dans $\mathbf{R}\Delta_1$. On note $H_{\neq 1} = H^n(X(t), \mathbf{R})_{\neq 1}$, $H_1 = H^n(X(t), \mathbf{R})_1$, $H_{\mathbf{C}} = H \otimes_{\mathbf{R}} \mathbf{C}$ et de même $H_{\mathbf{C},1}$, $H_{\mathbf{C},\neq 1}$. Soit F° et W_\circ utilisées dans [V] pour munir $H_{\mathbf{C}}$ d'une structure de Hodge mixte et N le logarithme de la partie unipotente de la monodromie.

On note

$$I^{p,q} = (F^p \cap W_{p+q}) \cap (\overline{F^q} \cap W_{p+q} + \sum_{j \geq 1} \overline{F^{q-j}} \cap W_{p+q-j-1}),$$

$$I_1^{p,q} = I^{p,q} \cap H_{\mathbf{C},1}, \quad I_{\neq 1}^{p,q} = I^{p,q} \cap H_{\mathbf{C},\neq 1},$$

$$I_{\neq 1,0}^{p,q} = \{x \in I_{\neq 1}^{p,q} / N^{p+q-n+1} x = 0\} \text{ pour } p+q \geq n,$$

et

$$I_{1,0}^{p,q} = \{x \in I_1^{p,q} / N^{p+q-n} x = 0\} \text{ pour } p+q > n.$$

On a alors une décomposition en somme directe :

$$H_{\mathbf{C}} = \bigoplus_{\substack{0 \leq j \leq p+q-n \\ n \leq p+q}} (N^j I_{\neq 1,0}^{p,q}) \oplus \bigoplus_{\substack{0 \leq j \leq p+q-n-1 \\ n < p+q}} (N^j I_{1,0}^{p,q}).$$

Soit $H = I \oplus A$ la décomposition de H en invariants et anti-invariants sous l'action de T^+ . Suivant Varchenko on considère le sous-espace vectoriel réel de $H_{\mathbf{C}} : \mathbf{R}H = I \oplus iA$. On note $\mathbf{R}F^\circ = F^\circ \cap \mathbf{R}H$, $\mathbf{R}W_\circ = W_\circ \cap \mathbf{R}H$. D'après [V] $\mathbf{R}F^\circ$ et $\mathbf{R}W_\circ$ munissent $\mathbf{R}H$ d'une structure de Hodge mixte réelle et on a $N(I) \subset A$, $N(A) \subset N(I)$. On définit :

$$\mathbf{R}I^{p,q} = (\mathbf{R}F^p \cap \mathbf{R}W_{p+q}) \cap (\overline{\mathbf{R}F^q} \cap \mathbf{R}W_{p+q} + \sum_{j \geq 1} \overline{\mathbf{R}F^{q-j}} \cap \mathbf{R}W_{p+q-j-1}),$$

$\mathbf{R}I_1^{p,q} = \mathbf{R}I^{p,q} \cap H_{\mathbf{C},1}$, et de même $\mathbf{R}I_{\neq 1}^{p,q}$, $\mathbf{R}I_{1,0}^{p,q}$, $\mathbf{R}I_{\neq 1,0}^{p,q}$. On note $\mathbf{R}\tilde{I}^{p,q}$ l'image de $\mathbf{R}I^{p,q}$ dans $\mathbf{R}W_{p+q}/\mathbf{R}W_{p+q-1}$, et de même $\mathbf{R}\tilde{I}_{\neq 1,0}^{p,q}$, etc.

On vérifie facilement que l'on a :

$$(*) \quad \mathbf{R}H = \left(\bigoplus_{\substack{0 \leq j \leq p+q-n \\ n \leq p+q}} (iN)^j \mathbf{R}I_{\neq 1,0}^{p,q} \right) \oplus \left(\bigoplus_{\substack{0 \leq j \leq p+q-n-1 \\ n < p+q}} (iN)^j \mathbf{R}I_{1,0}^{p,q} \right).$$

On note \overline{T}^+ l'involution de $\mathbf{R}H$ induite par la conjugaison complexe. On a $t(T^+) = \text{tr}(\overline{T}^+)$. Comme $\overline{T}^+(\mathbf{R}I^{p,q})$ et $\mathbf{R}I^{p,q}$ ont même image dans $\mathbf{R}W_{p+q}/\mathbf{R}W_{p+q-2}$ on obtient facilement que

$$\text{tr}(\overline{T}^+) = \sum_{0 \leq p \leq n} \text{tr}(\overline{T}^+ / \mathbf{R}\tilde{I}^{p,p}).$$

\tilde{T}^+ désignant l'involution induite par \overline{T}^+ .

En utilisant (*) et le fait que $\overline{T}^+iN = -iN\overline{T}^+$ on obtient que

$$\begin{aligned} \text{tr}(\overline{T}^+) &= \sum_{\substack{0 \leq j \leq 2p \\ 0 \leq p \leq m}} (-1)^j \text{tr}(\tilde{T}^+ | \mathbf{R}\tilde{I}_{\neq 1,0}^{m+p,m+p}) \\ &+ \sum_{\substack{0 \leq j \leq 2p-1 \\ 1 \leq p \leq m}} (-1)^j \text{tr}(\tilde{T}^+ | \mathbf{R}\tilde{I}_{1,0}^{m+p,m+p}) \end{aligned}$$

Ceci nous donne l'égalité :

$$\text{tr}(\overline{T}^+) = \sum_{0 \leq p \leq m} \text{tr}(\tilde{T}^+ | \mathbf{R}\tilde{I}_{\neq 1,0}^{m+p,m+p})$$

Comme la restriction de I à $H_n(X(t), \mathbb{C})_{\neq 1}$ est non dégénérée, on obtient par dualité une forme d'intersection I' sur $H_{\mathbb{C}, \neq 1}$. D'après [Sa], [Sc] et [St], I' polarise la structure de Hodge mixte induite sur $H_{\mathbb{C}, \neq 1}$. On en déduit aisément que $\sum_{0 \leq p \leq m} \text{tr}(\tilde{T}^+ | \mathbf{R}\tilde{I}_{\neq 1,0}^{m+p,m+p})$ est égal à $(-1)^m s(T^+)_{\neq 1}$.

Démonstration de b) : Quitte à faire un changement de coordonnées analytique réel au voisinage de zéro dans \mathbb{R}^{n+1} , on peut supposer que F est une application polynomiale de $\mathbb{C}^{n+1} \times \mathbb{C}^p \rightarrow \mathbb{C} \times \mathbb{C}^p$ telle que pour tout (t, u) de S , la variété projective $Y(t, u)$ obtenue comme clôture projective de $X(t, u)$ dans $\mathbb{C}P^{n+1}$ n'a pas d'autres singularités que celles de $X(t, u)$. On a alors un sous-ensemble analytique $Y \subset \mathbb{C}P^{n+1} \times S$ tel que si $\varphi : Y \rightarrow S$ est induit par la deuxième projection on ait $\varphi^{-1}(t, u) = Y(t, u)$ pour (t, u) dans S . De plus $Y, \varphi, Y(t, u)$ proviennent par extension des scalaires de $\mathbf{R}\varphi : \mathbf{R}Y \rightarrow \mathbf{R}S$ avec $\mathbf{R}Y(t, u) = \mathbf{R}\varphi^{-1}(t, u)$ la clôture projective de $\mathbf{R}X(t, u)$ dans $\mathbf{R}P^{n+1}$ pour (t, u) dans $\mathbf{R}S$. On note $\mathbf{R}Y(t) = \mathbf{R}Y(t, 0)$, $Y(t) = Y(t, 0)$.

Soit $\mathbf{R}\delta : \mathbf{R}\Delta_1 \rightarrow \mathbf{R}S$ une lissification réelle à un paramètre de $\mathbf{R}X(0)$ (on a $\mathbf{R}\delta(\mathbf{R}\Delta_1 \setminus \{0\}) \subset \mathbf{R}S \setminus \mathbf{R}\Delta$). On note $Y[s]$ la fibre $\varphi^{-1}(\delta(s))$ et on a $X[s] = Y[s] \cap \Delta_{n+1}$.

D'après la formule de Lefschetz on a pour s et t non nuls dans $\mathbb{R}^+ \cap \Delta_1$:

$$1) \quad \chi(\mathbf{R}Y[s]) = \sum_{i=0}^{2n} (-1)^i \text{tr}(T^+ | H^i(Y[s]), \mathbf{R}) ,$$

et

$$2) \quad \chi(\mathbf{R}Y(t)) = \sum_{i=0}^{2n} (-1)^i \text{tr}(T^+ | H^i(Y(t)), \mathbf{R}) ,$$

Comme la restriction de $\mathbf{R}\varphi$ à $\mathbf{R}Y \setminus \mathbf{R}\Delta_{n+1} \times \mathbf{R}\Delta_1$ est une fibration on a pour s, t dans $\mathbf{R}\Delta_1$:

$$3) \quad \chi(\mathbf{R}(Y[s] \setminus X[s])) = \chi(\mathbf{R}(Y(t) \setminus X(t))) ,$$

$$4) \quad \chi(\mathbf{R}\delta X[s]) = \chi(\mathbf{R}\delta X(t)) ,$$

et pour s, t non nuls dans $\mathbb{R}^+ \cap \Delta^i$:

$$5) \quad \sum_{i=0}^{2n} (-1)^i \operatorname{tr}(T^+ | H^i(Y[s] \setminus X[s], \mathbb{R})) = \sum_{i=0}^{2n} (-1)^i \operatorname{tr}(T^+ | H^i(Y(t) \setminus X(t), \mathbb{R}))$$

et

$$6) \quad \sum_{i=0}^{2n} (-1)^i \operatorname{tr}(T^+ | H^i(\delta X[s], \mathbb{R})) = \sum_{i=0}^{2n} (-1)^i \operatorname{tr}(T^+ | H^i(\delta X(t), \mathbb{R})) .$$

Comme $H^i(X(t, u), \mathbb{R}) = 0$ pour $i \notin \{0, n\}$ et $H^0(X(t, u), \mathbb{R}) \simeq \mathbb{R}$ on obtient en utilisant 1) - 6) :

$$\begin{aligned} \chi(\mathbb{R}, X[s]) - \operatorname{tr}(T^+ | H^n(X[s], \mathbb{R})) \\ = \chi(\mathbb{R}, X(t)) - \operatorname{tr}(T^+ | H^n(X(t), \mathbb{R})) \end{aligned}$$

pour s et t non nuls dans $\mathbb{R}^+ \cap \Delta_1$, ce qui donne i) d'après a).

La démonstration de ii) est similaire : d'après la formule d'Atiyah-Singer pour les involutions, on a pour s, t non nuls dans $\mathbb{R}^+ \cap \Delta_1$:

$$1') \quad \chi(\mathbb{R}, Y[s]) = (-1)^m \operatorname{sign}(T^+, H_n(Y[s], \mathbb{R})) ,$$

$$2') \quad \chi(\mathbb{R}, Y(t)) = (-1)^m \operatorname{sign}(T^+, H_n(Y(t), \mathbb{R})) ,$$

D'autre part comme la restriction de $\mathbb{R}\varphi$ à $\mathbb{R}Y \setminus \mathbb{R}\Delta_{n+1} \times \mathbb{R}\Delta_1$ est une fibration, on a :

$$5') \quad \operatorname{sign}(T^+, H_n(Y[s] \setminus X[s])) = \operatorname{sign}(T^+, H_n(Y(t) \setminus X(t))) ,$$

pour s et t dans $\mathbb{R}\Delta_1$.

Comme la signature d'une involution est additive sur les variétés orientées à bord de dimension réelle multiple de 4, on déduit de 5') :

$$\begin{aligned} 6') \quad \operatorname{sign}(T^+, H_n(Y[s], \mathbb{R})) - \operatorname{sign}(T^+, H_n(X[s], \mathbb{R})) \\ = \operatorname{sign}(T^+, H_n(Y(t), \mathbb{R})) - \operatorname{sign}(T^+, H_n(X(t), \mathbb{R})) \end{aligned}$$

pour s, t non nuls dans $\mathbb{R}^+ \cap \Delta_1$, tandis que d'après 3) et 4) :

$$7') \quad \chi(\mathbb{R}Y[s], \mathbb{R}) - \chi(\mathbb{R}X[s], \mathbb{R}) = \chi(\mathbb{R}Y(t), \mathbb{R}) - \chi(\mathbb{R}X(t), \mathbb{R}) .$$

De 1'), 2'), 6'), et 7'), on déduit :

$$\chi(\mathbb{R}X[s]) - (-1)^m \operatorname{sign}(T^+, H_n(X[s], \mathbb{R})) = \chi(\mathbb{R}X(t)) - (-1)^m \operatorname{sign}(T^+, H_n(X(t), \mathbb{R}))$$

pour s, t non nuls dans $\mathbb{R}^+ \cap \Delta_1$, d'où ii) d'après a).

Démonstration de iii) : Fixons t non nul de $\mathbb{R}^+ \cap \Delta_1$ et posons $E = H_n(X[t], \mathbb{R})$. On a une décomposition en somme directe $E = E_+^0 \oplus E_-^0 \oplus E_+^+ \oplus E_-^+ \oplus E_+^- \oplus E_-^-$ avec E_+^0 le sous-espace du noyau de I sur lequel T^+ agit comme l'identité, E_-^+ le sous-espace de E sur lequel I est définie positive et T^+ agit comme l'homothétie de rapport -1 , $E_-^0, E_+^+, E_+^-, E_-^-$ étant définis similairement. On note $\epsilon_1 = \dim E_+^0, \epsilon_2 = \dim E_-^0, a = \dim E_+^+, b = \dim E_-^+, c = \dim E_+^-, d = \dim E_-^-$.

On a les relations suivantes :

$$\begin{aligned} & a + b + c + d = \mu - \epsilon_1 - \epsilon_2 \\ & a + b - c - d = s(f) \\ & a - b + c - d = t(T^+, C) - \epsilon_1 + \epsilon_2 \\ & a - b - c + d = s(T^+, C) . \end{aligned}$$

En exprimant a, b, c et d en fonction de $\mu, s(f)$ et $t(T^+, C), s(T^+, C), \epsilon_1$ et ϵ_2 , en utilisant ii) et le fait qu'ils sont positifs on obtient facilement :

$$2|\chi(\mathbb{R}X(t) - 1)| \leq \mu + (-1)^{m+1}s(f) + \epsilon(f).$$

III.2. Démonstration du théorème II.2 :

Soit $Rf : (\mathbb{R}^2, 0) \rightarrow (\mathbb{R}, 0)$ à singularité isolée en zéro et $RX(0)$ un bon représentant de la courbe $Rf = 0$. On considère $R\bar{f} : (\mathbb{R}^3, 0) \rightarrow (\mathbb{R}, 0)$ défini par $f(x, y, z) = f(x, y) + z^2$ et $R\bar{X}(0)$ un bon représentant de la surface définie par $R\bar{f} = 0$. A une lissification réelle à un paramètre C de $RX(0)$ on associe par suspension une lissification réelle \bar{C} de $R\bar{X}(0)$. Le théorème II.2 est alors une conséquence du théorème II.1 ii), une fois remarqué que pour $t > 0$ on a $\chi(R\bar{X}(t)) - 1 = 2(N - P) + (n' - p)$.

IV. COMPLÉMENTS.

Dans [R], Risler a démontré que pour une lissification réelle à un paramètre d'un germe de courbe plane réduit on a toujours l'inégalité $N + P \leq \frac{1}{2}(\mu - r + 1)$, r désignant le nombre de composantes irréductibles et que pour les courbes ayant leurs tangentes distinctes, il existe toujours une lissification produisant $\frac{1}{2}(\mu - r + 1)$ ovales. Nous appellerons une telle lissification une M -lissification et supposerons que les $\frac{1}{2}(\mu - r + 1)$ ovales apparaissent pour $t > 0$. On peut se demander s'il existe pour les M -lissifications des congruences analogues à celles obtenues par Arnold [A1] et Rokhlin [Ro] dans le cas global. Nous ne pouvons répondre à cette question que dans un cas extrêmement particulier :

DÉFINITION IV.1 : Soit $f : (\mathbb{C}^2, 0) \rightarrow (\mathbb{C}, 0)$ un germe de fonction analytique à singularité isolée. On dit que f est unimodulaire si la forme d'intersection entière sur la fibre de Milnor de la suspension $\bar{f} = f + z^2$ est de discriminant ± 1 .

On a pour les courbes définies par des fonctions unimodulaires le résultat suivant, dont la démonstration est analogue à celle des congruences globales donnés dans [W], au regard des résultats des paragraphes précédents :

PROPOSITION IV.2 :. Si C est une M -lissification d'un germe de courbe réelle dont la complexifiée est unimodulaire, on a la congruence suivante :

$$2(N, -P) + (n' - p) \equiv 0 \quad (16)$$

BIBLIOGRAPHIE

- [A1] V.I. Arnold, On the arrangement of the ovals of real plane curves, involutions of 4-dimensional smooth manifolds, and the arithmetic of integral quadratic forms, *Functional Anal. Appl.* 5 (1971), 169-176.
- [A2] V.I. Arnold, The index of a singular point of a vector field, the Petrovskiĭ-Oleĭnik inequalities, and mixed Hodge structures, *Functional Anal. Appl.* 12 (1978), 1-12.
- [G] D.A. Gudkov, The topology of real projective algebraic manifolds, *Russian Math. Surveys* 29 (1974), 1-79.
- [G-Z] S.M. Gusein-Zade, The index of a singular point of a gradient vector field, *Funct. Anal. Appl.* 18 (1984).
- [K] V.M. Kharlamov, The generalized Petrowsky inequality, *Functional Anal. Appl.* 8 (1974), *ibid.* 9 (1975).
- [N] W. Neumann, Invariants of plane curve singularities, in *Nœuds, Tresses et Singularités*, Monographie No 31 de l'Enseignement Mathématique (1983), 223-232.
- [P] I. Petrowsky, On the topology of real plane algebraic curves, *Ann. of Math.* 39 (1938), 189-209.
- [R] J.J. Risler, Un analogue local du théorème de Harnack, à paraître aux *Inventiones Mathematicae*.
- [Ro1] V.A. Rokhlin, Proof of Gudkov's conjecture, *Functional Anal. Appl.* 6 (1972), 62-64.
- [Ro2] V.A. Rokhlin, Congruences modulo 16 in Hilbert's sixteenth problem, *Functional Anal. Appl.* 6 (1972), 301-306, Part II, *ibid.* 7 (1973), 163-164.
- [Sa] M. Saito, Modules de Hodge polarisables, Preprint IAS (1986).
- [Sc] W. Schmid, Variation of Hodge structure : the singularities of the period mapping, *Invent. Math.* 22 (1973), 211-319.
- [St] J. Steenbrink, Mixed Hodge structure on the vanishing cohomology, in *Real and Complex Singularities*, Oslo 1976, Sijthoff and Noordhoff, Alphen aan den Rijn 1977, 525-563.
- [V] A. Varchenko, On the local residue and the intersection form on the vanishing cohomology, *Math. USSR Izvestiya* 26 (1986), 31-52.

plex-

[W] G. Wilson, Hilbert's sixteenth problem, *Topology* 17 (1978), 52-73.

nal
. 5

ies,

29

pl.

id.

10-

19.

ae.

pl.

it.

n-

y,