Minimum à retenir/réviser avant l'épreuve, et donc à archiver cette annnée : 1) Etre habitué à utiliser l'aide.

2) opérations classiques en mode exact, approché, algèbre linéaire, calcul modulaire et polynomial. Notamment, pgcd, couples de Bezout, produit de matrices, noyau (y compris pour un élément de $M_n(\mathbb{Z}\ /p\mathbb{Z}\ )$,

3) Quelques instructions de programmation : boucles `for`, `while` , suite : `seq`. Créer une fonction une procédure, créer une fonction à partir d'un symbole.

4) Quelques instructions graphique de base, et surtout savoir obtenir ces fonctions et leurs options via les menus déroulant. Ex fonctions (paramétriques, implicites, statistiques ; ex histogrammes) et géométrie (points, droites...) et options d'affichage via le menu déroulant.

Exercice I: Découverte du logiciel

NB : Certaines syntaxes dépendent de la langue choisie (ou de la version installée).

Choisir sa configuration

⚠ Lors du premier lancement, les valeurs par défaut ne coïncident pas forcément avec vos préférences. Au premier lancement on répond à quelques questions. Choisissez le mode xcas car c'est celui de référence par défaut dans la documentation. (Le mode maple est pour les experts en maple, et le mode autre est pour le mode tortue logo...)

On peut ensuite modifier/affiner ses choix dans le menu Cfg. Ensuite, sauvez vos préférences grâce au menu. Il faut donc choisir le mode xcas et étudier la configuration du "cas" pour ne pas mal interpréter les réponses. (On peut l'obtenir rapidement en cliquant sur la barre grise entre les boutons SAUVER et STOP)

Pour la configuration du "cas", je conseille de :
COCHER radians, et de DÉCOCHER : approx, complex, `Cmpx_var`, Sqrt. On travaillera ainsi en mode exact dans le corps engendré par les coefficients de l'expression, alors que si l'on coche complex ou Sqrt, on rajoute i et des racines carrées ce qui ne permet pas par exemple une factorisation de polynôme sur un corps prescrit.

Observez dans le Tutoriel :

Dans le tutoriel (menu Aide>Débuter en Calcul Formel) on trouve facilement comment manier les objets du calcul formel.

Ex : comment affecter une variable, définir une fonction, substituer

C'est aussi un endroit où l'on trouve facilement la syntaxe complète de programmation.

1) a) Comment obtenir de l'aide sur un mot donné que l'on connait à peu près (par exemple sqrt) on fait : ?sqrt. Par exemple, comment fait on $\sqrt[3]{23}$?

b) Donner une valeur approchée des résultats précédents. (Soit en forçant xcas a être en flottants (Ex 23. ou approx(23)), soit avec evalf ou approx).

c) Trouver la syntaxe des constantes réelles ou complexes π, e, i (où $i^2 = -1$). Faire afficher (sans que la précision par défaut soit modifiée pour la suite.) les 1000 premières décimales de π.

2) On trouve aussi dans le tutoriel des explications sur les différentes notions de développer et simplifier.

L'interface : Apprenez à supprimer, copier, déplacer une ligne, un dessin, un programme...(ie l'entrée et la réponse)

Exercice II: aide html, bulles, menus

1) AIDE BULLE SUR UN MOT CONNU : Tapez `seq(` et étudiez les paramètres de cette fonction avec l'aide bulle [2]. Cette méthode est utile lorsque l'on connait le mot mais pas très bien les arguments ou les options.

2) ETUDIER LE MENU AIDE. RÉFÉRENCE [3] CALCUL FORMEL. Cette méthode est la plus adaptée (avec les menus déroulants, ou bien lorque ces derniers sont trop succincts) pour trouver une instruction dont on ne connait pas le mot clef.

Par exemple trouver la fonction pgcd de deux entiers en utilisant ce menu.

1. `http://webusers.imj-prg/frederic.han/agreg`
2. Laisser la souris sur la ligne avec la parenthèse ouverte, et attendre que la bulle apparaisse.
3. C'est le plus utile. à retenir

a) Comment ajouter un élément à une liste ? Ex ajoutez l'élément 55 à la liste `l:=[1,33,4]`.

b) `a:=1111;`. Comment libérer la variable `a` ?

3) Les menus déroulants sont aussi rapides[4] pour obtenir les instructions selon leur thèmes. (Notez le menu Scolaire où l'on trouve les instruction par niveau scolaire).

a) Quelle est la valeur théorique de

$$44.\arctan(1/57) + 7.\arctan(1/239) - 12.\arctan(1/682) + 24.\arctan(1/12943)$$

Lorsque l'on a de la chance[5], le logiciel peut repondre tout de suite. Il faut cependant être prêt à l'aider. Ex : calculer la tangente en demandant de développer au sens trigonométrique.

b) On pose : `l1:=[1,33,4]` et `l2:=[11,133,14]`. Quelle instruction permet de créer une liste en juxtaposant $l1$ et $l2$?

c) Affectez à `a` la valeur $e^{2i\pi/7}$. Calculez/Simplifiez $\sum_{i=10}^{16} a^i$. Essayez de simplifier $\sqrt[3]{7}+\sqrt{5}$ expliquez la notion de polynôme pour xcas. Quel est l'intérêt de cette simplification pour des calculs du type $(\sqrt[3]{7}+\sqrt{5})^{100}$?

4) L'index (ou complétion par tabulation). Utile pour obtenir un mot clef et ses synonymes, mais aussi des intructions connexes non équivalentes.

On peut aussi obtenir l'index par le menu aide. Par exemple on définit le symbole `P:=x/(x^2+1)` et la fonction `Q(x):=sin(1/x)` (syntaxe équivalente : `Q:=x->sin(1/x)`)

a) Etudiez les types de `P Q Q(x) Q(5) Q(6/pi)` (on pourra simplifier). D'une manière générale, il vaut mieux effectuer les calculs compliqués avec des symboles plutot qu'avec des fonctions. Les résultats seront le plus souvent bien plus lisibles et rapides.

b) Calculer les dérivées de P et Q.

c) (A retenir !) Comment obtenir à partir du symbole P défini ci dessus, la fonction $x \mapsto \dfrac{x}{x^2+1}$? En déduire la dérivée de $\dfrac{\sin(1/x)}{(\sin(1/x))^2+1}$

Exercice III:

1) Exprimer $\cos 5a$ en fonction de $\cos a$ (où a est une variable formelle).

2) Calculer $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos 5x}{2+\sin x}dx$.

3) Que se passe t'il avec $\int \frac{\cos(5*x)}{2+\sin(3*x)}$ et $\int \frac{1}{2+\sin(5*x)}$? Affichez un dessin de la réponse pour vérifier la continuité.

Exercice IV: Dénombrement et séries génératrices.

1) Afficher le coefficient de t^3 dans la série formelle associée à $\prod_{i=1}^{4} \frac{1}{1-a_i.t}$?

2) Généraliser l'exemple précédent pour en déduire de manière théorique le nombre d'éléments croissants dans $\{1,2,3,4\}^n$, puis dans $\{1,\ldots,k\}^n$

3) Quel est le cardinal de :
$\{(x_1,\ldots,x_5) \in \mathbb{N}^5 | x_1+3x_2+2x_3+x_4+4x_5 = 208\}$

4) En adaptant la formule $\sum_{n>0} p_n.t^n = \Pi_{i=1}^{\infty}\frac{1}{1-t^i}$ où p_n est le nombre de partitions[6] de n, calculer p_{50}.

5) Trouver le coefficient de $a^3b^2cd^2$ dans $(a+b+c+d)^8$. Vérifier votre réponse théorique avec la forme développée (utiliser `normal` pour développer un calcul lourd). (On pourra étudier l'aide de coeff pour recupérer le coefficient d'un monôme).

Exercice V:

1) Il existe dans xcas plusieurs façons de développer[7] : `ratnormal`, `normal`, `simplify`, `expand`. Lors de calculs lourds sur les polynômes il faut vraiment préférer "ratnormal" ou "normal" qui op-

4. mais parfois incomplets
5. ici c'est le cas
6. Une partition de n est une suite décroissante d'éléments de $\mathbb{N}^*$ de somme n.
7. sans compter les synonymes

timiseront. "simplify" sera plus lent car il tentera des simplifications plus sophistiquées. On pourra l'utiliser après avoir fait un "normal" non satisfaisant. En fait, "expand" travaillera avec les objets les plus généraux et pourra être très lourd car il ne regroupe pas les dénominateurs. Essayez ces intructions sur, `P1:=(x^2-1)/(x-1)`, `P2:=-cos(5*x)+16*cos(x)*sin(x)^4-12*cos(x)*sin(x)^2+cos(x)` et `P3:=(a*sqrt(3)+b/sqrt(6))^4`

2) Factoriser $x^{12}-1$ dans $\mathbb{Z}[x]$. En factorisant des polynômes judicieusement choisis, obtenir la valeur du polynôme cyclotomique Φ_{12} ?

3) Factorisez $P=(2x+1)^2(x^5-1)/(x-1)$ dans $\mathbb{R}[x]$ et dans $\mathbb{C}[x]$. Peut t'on espérer un résultat exact ?

a) Factoriser $X^{12}-1$ sur $\mathbb{Q}[\sqrt{3}]$ et sur $\mathbb{Q}[\sqrt{3}, i]$ et sur $\mathbb{Q}[e^{2i\pi/9}]$. (On peut tenter de rajouter une liste d'éléments en option de factor)

Exercice VI:

1) a) Effectuer un changement de variable pour que les inégalités $0<a<b<c$ soient facile à lire.

b) Démontrer en demandant un calcul élémentaire au logiciel que

$$3/2 \leq \frac{a}{b+c}+\frac{b}{a+c}+\frac{c}{a+b}$$

(Il ne s'agit pas de trouver une instruction du logiciel pour résoudre directement ce problème en tenant compte des hypothèses, mais de poser une question judicieuse pour que la réponse rende la preuve évidente.)

Exercice VII: géométrie, conjectures et calculs formels

On accèdera aux fonctions graphiques facilement via le menu déroulant.

1) Créer une fonction : $M : t \mapsto (\frac{\cos t}{\sin^3 t}, \frac{\sin t}{\sin^3 t})$

2) a) En mode géométrie, dessiner le point $M(\pi/2)$

b) Déssiner la courbe $C_1 : t \mapsto M(t)$. (Cf menu déroulant pour trouver l'instruction)

c) En utilisant la commande `assume(t1:=[0.7,0,Pi]);` en géométrie intéractive, utilisez le bouton apparu à droite pour expliquez ce qu'est une courbe paramétrée en affichant le point `point(M(t1))`. On peut insérer des `attributs` graphiques via le menu déroulant.

d) Ajoutez aussi l'élément `t2` de $]0..\pi[$ et dessiner $M(t_1), M(t_2), M(-t_1-t_2)$. Afficher ces points avec une grosse croix en taille un peu plus grande.

e) Dessiner la droite $M(t1), M(t2)$ en bleu. Que conjecturez vous ?

3) Démontrez votre conjecture par un calcul formel. (Les vecteurs se notent simplemenent `[ , , ]` (et les parenthèses ne comptent pas).

4) a) Exprimez les coordonnées de $M(t)$ en fonction de $u=\tan(t/2)$. On pourra utiliser une instruction xcas pour passer en $\tan(t/2)$ puis `subst` pour subtituer les `tan(t/2)` par des `u`. Stockez les dans `xu` et `yu`.

b) On considère l'équation :
`mystere:=factors(resultant(denom(xu)*x-numer(xu),denom(yu)*y-numer(yu),u))[2];` ou bien celle ci : `mystere2:=eliminate([x=xu,y=yu],u)[0];` Dessinez la.

c) Démontrez que $M(t)$ appartient à cette courbe. (On pourra utiliser la fonction `unapply` pour transformer un symbole en une fonction.)

Exercice VIII: (type colle)

Expliquez et illustrez une méthode pour paramétrer une conique avec des fractions rationnelles, et comment l'appliquer au calcul de primitives de fractions rationnelles en x et $\sqrt{x^2+ax+b}$.