Université de Paris 7 **TP01 : Algèbre Linéaire** **agreg**

2016-2017 (F.Han`http://www.imj-prg.fr/~han/agreg`)

Exercice I: (A savoir, cf. TP00)

1) Différences symboles/fonctions. Ex : si la variable `R` contient le symbole `(a+b)/(1-a^2)` comment créer les fonctions $a \mapsto \dfrac{a+b}{1-a^2}$ et $(a,b) \mapsto \dfrac{a+b}{1-a^2}$ à partir de `R` ?

2) Libérer une variable pour pouvoir l'utiliser comme symbole.

Exercice II: Algèbre linéaire

1) a) Dans xcas les vecteurs [1] n'ont pas un type particulier ce sont juste des listes et se notent entre : `[ ]`. Par exemple, essayez : `v1:=[seq(j,j=1..4)]` et `v2:=[a,b,c,d]` et `t*v1+v2` Les matrices se notent `M:=[[1,2,3,4],[5,6,7,8]]` et leur lignes sont `M[0]` `M[1]` ... et les coefficients `M[i,j]`

Les vecteurs s'affichent en ligne, mais ce sont bien des vecteurs et non des matrices lignes. Remarquez la différence d'affichage entre `[v1]` et `v1`, et copiez [2] collez la sortie (noire) de `[v1]` dans une zone d'entrée pour étudier les `[]`.

b) Les lois usuelles en algèbre linéaire utilisent encore `+` et `*`. Calculez les images de v_1 et v_2 par M (remarquez que la sortie est bien un vecteur). Calculez $M2 = M \cdot ({}^tM)$, $M2^2$. Comment obtenir rapidement $M2^n$?

c) Que fait `v1*v2` ?

2) a) En utilisant une instruction qui crée des listes automatiquement (ex pour xcas : `seq`) et une instruction pour créer des matrices diagonales par blocs, créer une matrice diagonale de valeurs propres $1, 2, 3, 4$.

3) a) Essayer/commenter [3]

```
A:=matrix(4,4)+1;
```

b) Remaquez que dans xcas la fonction opérande : `op` permet d'enlever un niveau de crochets. On ajoute donc une ligne tres facilement sans connaitre les instructions dédiées.

4) Une syntaxe très utile et à retenir est de créer une matrice à partir d'une fonction de deux variables en utilisant [4] `matrix` :

a) Par exemple, créez dans votre logiciel la fonction : $f : (x, y) \mapsto x + 10^y$ puis la matrice suivante :

```
matrix(6,6,f);
```

b) On souhaite travailler avec un nombre de variables que l'on peut facilement modifier. On aimerait donc des noms du type $x1, x2, \ldots$. Sous [5] Xcas, une première solution est d'utiliser plutot des noms du type `x[j]` où `x` est une lettre inutilisée. On peut alors créer la matrice de Vandermonde de taille 6 ainsi :

```
f1(u,v):=x[u]^v;V:=matrix(6,6,f1);
```

c) Si l'on souhaite vraiment des noms de variables sans crochets, il faut savoir convertir une chaine en une variable ou symbole :

Cf : Aide/Réf Cal Form/ Chap 9

```
A:="tutu"; // une chaine
A+1; // une chaine
B:=#A; // B et C sont des symboles utilisables pour des calculs
```

1. dans sage, type : vector
2. Notez que l'on peut copier une sortie pour en faire une entrée, même si l'aspect semble différent. Ca n'est pas toujours facile de sélectionner une sortie à cause de la structure d'arbre d'une formule. Control a selectionne tout
3. idem dans xcas et sage
4. idem dans sage
5. Dans sage définir un nouvel anneau de polynomes

```
C:=expr(A); // un symbole  utilisable ds un calcul
f2(u,v):=(#("x"+u))^v;
matrix(6,6,f2);
```

d) Calculez le déterminant de Vandermonde formel en taille 6x6 et factorisez le.

e) Lorsqu'il y a beaucoup de variables et que la taille de la matrice n'est pas trop grande, le calcul du déterminant par la méthode des mineurs s'avère plus efficace. En déduire un moyen d'obtenir le déterminant de Vandermonde en taille 8x8, puis factorisez le. (pour les calculs longs on a intérêt à stocker d'abord le déterminant puis tenter de factoriser.)

Pour la syntaxe de programmation, regardez le tutoriel dans le menu : Aide/Débuter en Calcul Formel

Exercice III: Introduction aux matrices nilpotentes

1)

a) Créez une fonction `JJ(n)` qui retourne une matrice de taille $n \times n$ ayant pour seuls termes non nuls des 1 sur la droite $j - i = 1$.

b) Mini programme. (Sous xcas on pourra utiliser/découvrir l'éditeur de programme, et regarder le tutoriel).

Créez une fonction `J(L)` qui associe à une liste décroissante d'entiers naturels non nuls `L` [6], une matrice diagonale par blocs constitués des `JJ(n)` correspondants. On cherchera une instruction pour construire des matrices diagonales par blocs, et l'on vérifiera que la suite est bien décroissante.

c) Etudiez sur divers exemples les rangs et noyaux des puissances de `J(L)` en fonction de L. Conclusion ?

2) a) Créez une fonction `M(P,Q)` qui aux deux polynômes P, Q en la variable x associe la matrice dans la base canonique $(1, x, \ldots, x^{\deg(Q)-1})$ de l'application :

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{Q}[x]/(Q) & \longrightarrow & \mathbb{Q}[x]/(Q) \\ R & \mapsto & R \cdot P \end{array}$$

Indications : on cherchera une fonction qui donne à i fixé le coefficient de x^i dans un polynome en x plutôt que de convertir des polynômes en liste. (Pourquoi ? quelle serait la longueur de la liste pour $1 + x^3, 2 + x, \ldots$?)

b) Vérifiez que $M(x + 2, x^4 - 1)$ vaut : $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$

3) On considère la matrice $N = M(P, Q)$ où :

$$P = x^5 - 2 \cdot x^4 + x^3 - 2 \cdot x^2 - 2 \cdot x + 4$$

$$Q = \left(x^2 - 1\right)^2 \left(x^2 + 2\right)^5 (x^3 - 5 \cdot x^2 + 8 \cdot x - 4)$$

a) Quel est le polynôme caractéristique de N ? (NB : l'instruction directe est plus efficace que $\det(A - x.I)$. Quel est le polynôme minimal de N ?

b) Comment obtient t'on une base du noyau de N ? Par exemple, comment calculer la somme du second et troisième vecteur de cette base ? Comment obtenir la dimension du noyau de N ? (On cherchera une technique qui fonctionne aussi pour les applications injectives)

c) En demandant au logiciel de calculer des rangs de certaines matrices, déterminer l'unique L pour que $J(L)$ et N puissent être semblable. (On rappelle que l'on impose à L d'être décroissante à valeur dans $\mathbb{N}^*$, et on n'utilisera pas de commande de Jordanisation du logiciel)

d) Donnez une base de $\ker N^4$, et choisissez deux vecteurs a_1, a_2 de $\ker N^5$ indépendants modulo $\ker N^4$. Que devez vous demander au logiciel pour prouver que a_1, a_2 conviennent ?

6. exemple : [2,2,1,1]

e) Prenez un vecteur a_3 dans $\ker N^3$ tel que $N^2(a_1), N^2(a_2), a_3$ soient indépendants modulo $\ker N^2$. Prouvez avec votre logiciel que votre choix de a_3 est légitime.

f) Prenez deux vecteurs a_4, a_5 de $\ker(N^2)$ tels que $N^3(a_1), N^3(a_2), N(a_3), a_4, a_5$ soient libres modulo $\ker(N)$.

g) On considère la famille de vecteurs

$$N^4(a_1), \dots, N(a_1), a_1, N^4(a_2), \dots, N(a_2), a_2, N^2(a_3), \dots, a_3, N(a_4), a_4, N(a_5), a_5.$$

Vérifiez [7] que c'est une base de $\mathbb{Q}^{17}$. Donnez ma matrice P_N de passage associée, et conjuguez N pour obtenir une matrice de type `J(L)`.

Exercice IV:

On a souvent besoin d'obtenir "au hasard" une matrice à coefficients entiers de déterminant 1. (Par exemple pour créer un exemple ou un exercice avec un type de réponse voulu). Quel résultat sur $SL_n(\mathbb{Z})$ va nous être utile ?

1) a) Créer une fonction `T(a,b,l,n)` qui retourne la matrice carrée de taille n avec des 1 sur la diagonale, telle que $T_{a,b} = l$ si $a \neq b$ et que T ait des 0 ailleurs. (le plus simple est probablement de partir de l'identité et de modifier un coefficient). Quel est l'inverse de la matrice `T(a,b,l,n)` ?

b) Vérifiez que votre variable `a` est bien libre [8], et créez la matrice 5×5 `A` de coefficients `a[i,j]` avec $0 \leq i, j \leq n-1$. Et illustrez/commentez le lien entre une opétation ligne ou colonne et T.

2) En déduire comment obtenir un élément de $SL_n(\mathbb{Z})$ "au hasard" un peu compliqué.

---

7. vu que l'on a fait les vérifications précédentes, on pourrait démontrer que cette dernière vérification est inutile
8. comment la libérer ?