Université de Paris 7 **TP07 Pivot et applications** **agreg 2016-2017**
(F.Han [1]**)**

(Extrait du Rapport du Jury 2015, Option C.)
Pour beaucoup de candidats le réflexe "pivot de Gauss" ne vient qu'en réponse à des questions concernant les systèmes linéaires, mais son utilisation pour le calcul de déterminants ou de rang est parfois une découverte pour les canditats - cela devrait être une connaissance de base, ou, à défaut, une acquisition indispensable d'un travail de préparation à l'épreuve de modélisation C. Notons également que le coût de cet algorithme reste inconnu de l'écrasante majorité des candidats.

Exercice I:

1) Créez une fonction `trig(M)` qui retourne une matrice triangulaire supérieure déduite de la matrice `M` par opérations élémentaires sur les lignes. (On pourra faire deux versions de cette fonction, une qui n'utilise que les opérations sur le corps de base et l'autre qui utilise les opérations sur les vecteurs pour travailler directement avec les lignes)

2) Donnez le nombre de multiplications effectuées par cete méthode lorsque M est de taille $n \times n$ (d'abord avec une somme puis avec une formule fermée).

3) Donnez deux types exemples où vous pouvez considérer le coût d'une multiplication constant.

4) a) En utilisant une fonction aléatoire, créez une matrice à coefficients dans $\mathbb{Z}/101\mathbb{Z}$ de taille 250×400 et de rang (très probablement) 154.

b) Utilisez votre programme pour trouver le rang de cette matrice.

5) Utilisez votre programme pour calculer un déterminant.

6) Prendre au hasard une matrice M de taille 20×20 à coefficients entiers compris entre -50 et 50.

a) Prendre deux nombres premiers p_1, p_2 de l'ordre de 2^{30} et calculez $\det(M)$ dans $\mathbb{Z}/p_i\mathbb{Z}$. (Si votre programme est trop lent, vous pouvez utiliser la commande interne).

b) En déduire un représentant de $\det(M)$ dans $\mathbb{Z}/p_1p_2\mathbb{Z}$ de valeur absolue minimale.

c) Ajoutez de nouveaux nombres premiers $p_3, \ldots, p_k$ et continuez jusqu'à ce que la valeur trouvée semble stationnaire, ou alors utilisez une majoration usuelle de $|\det(M)|$ pour en déduire la valeur de $\det(M)$ dans $\mathbb{Z}$.

Exercice II: Déterminants, comparaison et utilité des différentes méthodes

Etudiez dans la documentation (Reference>calcul formel) html de xcas les différentes options de la fonction déterminant, et les différents algorithmes possibles.

1) Quelle option correspond au pivot de Gauss usuel ? Estimez le nombre d'opérations sur le corps de base pour le pivot de Gauss avec la notation $O()$. en retour.

a) Technique pour faire de nombreux essais : affectez une variable. Ex `n:=10;` puis créez des matrices de taille $n \times n$ aléatoires à coefficients dans $\mathbb{Z}/101\mathbb{Z}$ (utilisez `%` pour passer en modulaire). Calculez ce déterminant par la méthode du pivot usuel déjà implémentée dans xcas. puis affichez le temps. Augmentez n et comparez avec la méthode des mineurs (implémentée aussi dans xcas) et montrez ses limites. Qui l'emporte rapidement dans ce modèle ? Observez dans l'aide html-algorithmes la partie sur les déterminants.

b) Calculez avec xcas la somme formelle : $\sum_{k=0}^{n} k\binom{n}{k}$. Quel est le nombre de multiplication dans la méthode de Laplace ? (par les mineurs)

2) Créez une assez grande matrice à coefficients entiers de valeurs absolue au plus 10. Comparez le pivot de Gauss usuel à celui de Bareiss. Comparez ensuite avec `det(M)` sans options. Quel est cette fois l'algorithme utilisé (**Cf nombres premiers applications**) ?

3) a) Essayer maintenant `n:=4` et `purge(a)`; (pour être sur d'avoir une variable formelle) `A:=matrix(n,n,(u,v)->a[u,v])`. (Retenir cette syntaxe). Que fait `d1:=det(A,rational_det)` par rapport à `d2:=det(A,bareiss)` ? Comparez aussi les différentes facons de développer : `simplify`, `normal`, `expand`.

1. http://webusers.imj-prg/frederic.han/agreg

Pour les simplifications rationnelles lourdes, il on préférera toujours normal aux autres instructions.

b) Avec $n = 5$ ou 6 comparez le pivot par bareiss et la méthode des mineurs. Conclusion [2] ?

c) Démontrez [3] par un calcul logiciel la formule du déterminant du produit de 2 matrices de taille 5×5. Quel est le nombre de termes d'un polynôme de degré 5 en 25 variables.

Exercice III: Polynôme minimal. (Cf Problèmes de rang et applications)

Soit v un vecteur et u un endomorphisme de E (E ev de dim n). On note $P_{u,v}$ un générateur de l'idéal : $\{P \in k[x], P(u)(v) = 0\}$.

1) Expliquer sur un exemple de taille n aléatoire (on commencera par $n = 8$)comment on peut trouver $P_{u,v}$ à partir d'une recherche de noyau.

2) Recommencer sur un exemple où $P_{u,v}$ est de degré inférieur à la dimension de E.

a) Optimiser le calcul des $A^k(v)$, et regardez si le polynôme obtenu annule A. Estimer le nombre d'opérations sur le corps de base.

b) Justifier l'interet de cette méthode pour trouver le polynôme minimal de u.

3) Etudiez dans la documentation de xcas les différentes options pour calculer le polynôme caractéristique. Expliquez l'intéret de l'option pmin. Illustrez sur des exemples.

Exercice IV: Gauss-Bareiss ; Bordant, applications

(Cf H. Cohen, "A course in computationnal algebraic number theory" et dans xcas `aide>algorithmes>pivot`)
Créer une matrice M formelle carrée de taille 3.

1) Comment afficher très simplement la première ligne de M ?

2) On considère une suite ($0 \leq k < n$, l'indice k sera parfois noté en exposant) de matrices carrées de taille $n - k$: $M_k = (a_{i,j}^{(k)})_{k+1 \leq i,j \leq n}$ définie par la relation de récurrence suivante : ($c_0 = 1$)

$$1 \leq k < n,\ a_{i,j}^{(k)} = \frac{1}{c_{k-1}} \begin{vmatrix} a_{k,k}^{(k-1)} & a_{k,j}^{(k-1)} \\ a_{i,k}^{(k-1)} & a_{i,j}^{(k-1)} \end{vmatrix},\ c_k = a_{k,k}^{(k-1)}$$

PROPOSITION : *Toutes les divisions par c_k sont exactes, et* $\det(M_k) = c_k^{n-k-1} \det(M_0)$. *En particulier* $\det(M_0) = c_n$.

a) Montrer la proposition pour une matrice formelle 3×3

b) A partir d'une matrice formelle $M_0 = A$ de taille 5, illustrer [4] le fait que :

$$a_{i,j}^{(k)} = \det(A_{u,v})_{u \in I, v \in J}$$

où $I = \{1, \ldots, k, i\}$, $J = \{1, \ldots, k, j\}$.

c) Montrer que $\det(M_k) = \dfrac{c_k^{n-k-1}}{c_{k-1}^{n-k}} \det(M_{k-1})$, et prouver la proposition.

d) En déduire une variante du pivot où l'on n'introduit pas de dénominateurs. (Gauss-Bareiss) Remarquer qu'elle est implémentée (Cf par exemple `pivot`). Illustrez l'importance de la simplification en affichant le produit des c_k pour une matrice de taille 10 à coefficients entiers entre -10 et 10

2. Avec des matrices un peu plus grandes mais contenant pas mal de 0 on observe aussi ce genre de phénomène.

3. Intérêt pédagogique : Ex les matrices reviennent au Lycée, avec certaines définitions la preuve de formule du produit est gênante

4. Ne pas utiliser d'indice k ie ecraser les M intermédaires sauf A. Si l'on n'y arrive pas, le faire lorsque A est de taille 3