Université de Paris 7 **(F.Han [1])**

TP08 Polynome caractéristique

agreg 2016-2017

Exercice I:

Comparez sur quelques exemples pour une matrice A à cofficients entiers les temps de calcul de son polynome caractéristique par $\det(A - xI)$ (par une méthode de type pivot) et par une fonction dédiée du logiciel.

Exercice II: Polynôme Caractéristique ; Th Cayley-Hamilton. Méthode de Faddeev

Soit A une matrice de taille n, I l'identité de taille n, et $M = X.I - A$. Nous allons déduire de la formule

$$^tM^{adj}.M = M.^tM^{adj} = \det(M).I \ (*)$$

une méthode pour calculer le polynôme caractéristique de A, et aussi une preuve du théorème de Cayley-Hamilton. (où M^{adj} est la matrice adjointe ou comatrice de M)

On note $\det(M) = P_A(X) = \sum_i a_i.X^i$ le polynôme caractéristique de A. On écrit $^tM^{adj} = \sum_{i=0}^{n-1} B_i.X^i$ où B_i est une matrice de taille n. On déduit de la formule $(*)$:

$$a_i.I = B_{i-1} - B_i.A \ (**)$$

et $B_{n-1} = a_n.I = I$

On remarque de plus que $P'_A(X) = tr(M^{adj}) = \sum_i tr(B_i).X^i$. On obtient alors les B_i par récurrence décroissante à partir de $B_n = I$ grâce aux formules [2] :

$$\begin{cases} a_i = \dfrac{tr(B_iA)}{i-n} \\ B_{i-1} = B_i.A + a_i.I \end{cases}$$

1) a) Calculer P_A et A^{adj} par cette méthode.

b) Vérifiez et faites quelques tests.

c) Donnez une estimation du nombre de multiplications sur le corps de base pour trouver P_A par cette méthode.

Exercice III: Polynôme caractéristique ; Mineurs diagonaux

Commencer par poser `n:=5;`, on le fera éventuellement augmenter après. Créer l'ensemble $I_n = \{1, \ldots, n\}$. Comment retirer l'ensemble $\{2, 4\}$ de I_n.

1) En utilisant 2 fois `seq` créer une procédure `extr` de (A, I, J) qui retourne la matrice $A_{i\in I, j\in J}$

2) On condidère une matrice A, formelle de taille n, et la matrice diagonale formelle `d:=diag(seq(x[j],j=0..n-1));`

a) Etudier la documentation sur les dérivées, dérivées partielles, dérivées d'ordre supérieur et liste des dérivées partielles.

b) Comparer quelques mineurs diagonaux de taille 3 avec $\dfrac{\partial \det(A-d)}{\partial x[u] \partial x[v]}$ évalué en 0

c) On note $P = \det(A - x * I)$ le polynôme caractéristique de A. Quels sont ses coefficients en fonction de ses dérivées ?

d) Conclure [3] que le coefficient de x^{n-i} de P est $(-1)^{n-i}$ fois la somme des mineurs [4] diagonaux de taille i de A.

---

1. `http://webusers.imj-prg/frederic.han/agreg`
2. prendre la trace dans $(**)$
3. Pour une application de cette formule, TP graphes, nombre de triangles dans un graphe, ... prop 3.3, 3.6, 3.7
4. il y en a C_n^i