Université de Paris 7 | **TP08 Pb de rang applications** | **agreg 2020**

(F.Han [1])

(Extrait du Rapport du Jury 2015, O
Pour beaucoup de candidat
concernant le
rang e
base, ou, à défaut, une acquisition indispensable d'un travail de pré
modélisation C. Notons également que le coût de cet algorithme re
majorité de

Exercice I: Méthode de Berlekamp (cf. Pb de rang, corps finis, polynômes)
(cf TP07)

Exercice II: (cf. méthode de Faddeev)
Sous xcas ou sage, quel mot clef rechercher pour trouver directement une comatrice d'une matrice A ? Pourquoi xcas rend t'il une grande liste plutot qu'une simple matrice ?

Exercice III: Polynôme minimal. (Cf Problèmes de rang et applications)
Soit v un vecteur et u un endomorphisme de E (E ev de dim n sur un corps infini). On note $P_{u,v}$ un générateur de l'idéal : $\{P \in k[x], P(u)(v) = 0\}$.

1) Expliquer sur un exemple de taille n aléatoire (on commencera par $n = 8$)comment on peut trouver $P_{u,v}$ à partir d'une recherche de noyau.

2) Recommencer sur un exemple où $P_{u,v}$ est de degré inférieur à la dimension de E.

a) Pour expliquer comment la méthode évite de faire plusieurs fois les mêmes calculs, on utilisera d'abord une commande qui donne une forme échelonnée avant de faire des recherches de noyau. Etudiez les commandes de forme échelonnée et échelonnée réduite. Comment interpréter le résultat d'une telle commande avec une matrice contenant des symboles. Ex : `[[a,b],[c,d]]`. Comment connaitre la liste des éléments inversibles qui ont été utilisés ?

b) Optimiser le calcul des $A^k(v)$, et regardez si le polynôme obtenu annule A. Estimer le nombre d'opérations sur le corps de base.

c) Justifier l'intérêt de cette méthode pour trouver le polynôme minimal de u.

3) Etudiez dans la documentation de xcas les différentes options pour calculer le polynôme caractéristique. Expliquez l'intéret de l'option pmin. Illustrez sur des exemples.

Exercice IV: Déterminants, comparaison et utilité des différentes méthodes
Etudiez dans la documentation (Reference>calcul formel) html de xcas les différentes options de la fonction déterminant, et les différents algorithmes possibles.

1) Quelle option correspond au pivot de Gauss usuel ? Estimez le nombre d'opérations sur le corps de base pour le pivot de Gauss avec la notation $O()$. en retour.

a) Technique pour faire de nombreux essais : affectez une variable. Ex `n:=10;` puis créez des matrices de taille $n \times n$ aléatoires à coefficients dans $\mathbb{Z}/101\mathbb{Z}$ (utilisez `mod` pour passer en modulaire). Calculez ce déterminant par la méthode du pivot usuel déjà implémentée dans xcas. puis affichez le temps. Augmentez n et comparez avec la méthode des mineurs (implémentée aussi dans xcas) et montrez ses limites. Qui l'emporte rapidement dans ce modèle ? Observez dans l'aide html-algorithmes la partie sur les déterminants.

b) Calculez avec xcas la somme formelle : $\sum_{k=0}^{n} k\binom{n}{k}$. Quel est le nombre de multiplication dans la méthode de Laplace ? (par les mineurs)

1. `http://webusers.imj-prg/frederic.han/agreg`

2) Créez une assez grande matrice à coefficients entiers de valeurs absolue au plus 10. Comparez le pivot de Gauss usuel à celui de Bareiss. Comparez ensuite avec `det(M)` sans options. Quel est cette fois l'algorithme utilisé (**Cf nombres premiers applications** et Ex5) ?

3) a) Essayer maintenant `n:=4` et `purge(a)` ; (pour être sur d'avoir une variable formelle) `A:=matrix(n,n,(u,v)->a[u,v])`. (Retenir cette syntaxe). Que fait `d1:=det(A,rational_det)` par rapport à `d2:=det(A,bareiss)` ? Comparez aussi les différentes facons de développer : `simplify`, `normal`, `expand`.

Pour les simplifications rationnelles lourdes, il on préférera toujours normal aux autres instructions.

b) Avec $n = 5$ ou 6 comparez le pivot par bareiss et la méthode des mineurs. Conclusion [2] ?

Exercice V: (préparez une présentation orale de 15min)

Présentez/Illustrez une méthode de calcul du déterminant d'une matrice à coefficients entiers par réduction modulo des nombres premiers et méthode du pivot dans des corps finis. Expliquez les couts, illustrez sur des exemples...

Quelques questions pour aider à expliquer la méthode sur un exemple :

1) Prendre au hasard une matrice M de taille 20×20 à coefficients entiers compris entre -50 et 50.

a) Prendre deux nombres premiers p_1, p_2 de l'ordre de 2^{30} et calculez $\det(M)$ dans $\mathbb{Z}/p_i\mathbb{Z}$. (Si votre programme est trop lent, vous pouvez utiliser la commande interne).

b) En déduire un représentant de $\det(M)$ dans $\mathbb{Z}/p_1p_2\mathbb{Z}$ de valeur absolue minimale.

c) Ajoutez de nouveaux nombres premiers $p_3, \ldots, p_k$ et continuez jusqu'à ce que la valeur trouvée semble stationnaire, ou alors utilisez une majoration usuelle [3] de $|\det(M)|$ pour en déduire la valeur de $\det(M)$ dans $\mathbb{Z}$.

Exercice VI: Gauss-Bareiss ; Bordant, applications

(Cf H. Cohen, "A course in computationnal algebraic number theory" et dans xcas `aide>algorithmes>pivot`) Créer une matrice M formelle carrée de taille 3.

1) Comment afficher très simplement la première ligne de M ?

2) On considère une suite ($0 \le k < n$, l'indice k sera parfois noté en exposant) de matrices carrées de taille $n-k$: $M_k = (a_{i,j}^{(k)})_{k+1 \le i,j \le n}$ définie par la relation de récurrence suivante : ($c_0 = 1$)

$$1 \le k < n,\ a_{i,j}^{(k)} = \frac{1}{c_{k-1}} \begin{vmatrix} a_{k,k}^{(k-1)} & a_{k,j}^{(k-1)} \\ a_{i,k}^{(k-1)} & a_{i,j}^{(k-1)} \end{vmatrix},\ c_k = a_{k,k}^{(k-1)}$$

PROPOSITION : *Toutes les divisions par c_k sont exactes, et* $\det(M_k) = c_k^{n-k-1} \det(M_0)$. *En particulier* $\det(M_0) = c_n$.

a) Montrer la proposition pour une matrice formelle 3×3

b) A partir d'une matrice formelle $M_0 = A$ de taille 5, illustrer [4] le fait que :

$$a_{i,j}^{(k)} = \det(A_{u,v})_{u \in I, v \in J}$$

où $I = \{1, \ldots, k, i\}$, $J = \{1, \ldots, k, j\}$.

c) Montrer que $\det(M_k) = \dfrac{c_k^{n-k-1}}{c_{k-1}^{n-k}} \det(M_{k-1})$, et prouver la proposition.

d) En déduire une variante du pivot où l'on n'introduit pas de dénominateurs. (Gauss-Bareiss) Remarquer qu'elle est implémentée (Cf par exemple `pivot`). Illustrez l'importance de la simplification en affichant le produit des c_k pour une matrice de taille 10 à coefficients entiers entre -10 et 10

2. Avec des matrices un peu plus grandes mais contenant pas mal de 0 on observe aussi ce genre de phénomène.
3. Hadamard
4. Ne pas utiliser d'indice k ie ecraser les M intermédaires sauf A. Si l'on n'y arrive pas, le faire lorsque A est de taille 3