Université de Paris 7

TP09 Méthodes type Newton, Polynômes d'endomorphismes

agreg 2016-2017 (F.Han[1])

Exercice I: Illustration Newton (<30min)

Dans cet exercice nous allons illustrer ce que représente une convergence quadratique : ie ce que représente une majoration du type :

$$|l - u_{n+1}| \leq C.|l - u_n|^2$$

On rencontre par exemple ce genre de majoration dans la méthode de Newton pour trouver un zéro non multiple d'une fonction f assez régulière.

Nous allons ici prendre $f : x \mapsto x^2 - 2$ et trouver une valeur approchée de $\sqrt{2}$.

1) Comparez théoriquement la méthode de Newton $x_{n+1} = x_n - \dfrac{f(x_n)}{f'(x_n)}$ avec celle de Heron qui calcule $\sqrt{d}$ en définissant u_{n+1} comme la moyenne de u_n et $\dfrac{d}{u_n}$.

2) On considère la suite récurrente :

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}, x_0 = 2$$

Créez une fonction `newt(n,d)` qui calcule de manière itérative x_n avec d chiffres significatifs (pour être plus efficace on programmera plutot la formule la plus simple possible).

⚠ On prendra soin de faire tous les calculs en valeur approchée avec d chiffres significatifs. Evitez de modifier la variable globale `Digits` (ni la configuration globale), et préferez une fonction qui convertisse un entier en un flottant de precision d.

3) Pour $0 \leq n \leq 11$ donnez la valeur exacte de

$$E(\log_{10}(|x_n - \sqrt{2}|))$$

et expliquez grâce à cette illustration la notion de convergence quadratique en language commun. (Quels problemes rencontrent t'on ?)

Exercice II: (facultif, introduction/motivations pour le minitexte[2])

Lorsque l'on considère la décomposition de Dunford d'un endomorphisme $u = d + n$ de $\mathbb{C}^n$ et sa preuve utilisant les sous espaces caractéristiques, on ne voit pas comment trouver d et n sans connaitre les valeurs propres de u, et bien que d et n soient des polynômes en u les propriétes des coefficients de d et n en fonction de ceux de u sont assez dissimulées. Par exemple, on peut trouver un argument simple pour montrer que si u est réel, d et n aussi, mais que peut on dire avec d'autres corps ?

1) Créer les matrices companion C_1 et C_2 des polynômes $(x^3 - 8)^2$ et $(x^2 - 4)^3$. Ainsi que la matrice A diagonale par blocs de C_1 et C_2.

a) Justifier sans calculs que sa décomposition de Dunford est réelle.

b) De tête, et aussi avec votre logiciel, donner la forme de jordan de A. Avec le logiciel, récupérez la matrice de passage.

Exercice III: (révisions techniques)⚠ Fonctions/Symboles

Dans giac/xcas (et aussi sage), il ne faut pas confondre symboles et fonctions.

1) Par exemple , si l'on pose `ps:=x^2+1;`, alors on dispose d'un symbole. Si l'on essaye de créer une fonction à partir de ce symbole en faisant simplement `bad(x):=ps;` on voit apparaitre un "Attention" et le résultat risque de ne pas faire ce que l'on veut probablenent à cause de l'ordre des évaluations.

Par exemple si l'on souhaite créer la fonction f qui à x associe la dérivée de p.

a) ⚠ Mauvaise méthode : essayez `bad_f(x):=eval(diff(ps,x));` puis `bad_f` ; `bad_f(x)` ; `bad_f(y)` ; `bad_f(x^2)` ;

1. `http://webusers.imj-prg.fr/~frederic.han/`
2. On pourra dans un premier temps ne lire que l'introduction et passer à l'exercice suivant si le temps presse.

b) Bonne méthode utiliser : *unapply*

2) On pose `pf(x):=x^2+1;` Cette fois `pf` est une fonction (affichez `pf` dans une ligne seule). Calculer la dérivée de $\frac{1}{x^2+1}$ au point 1. Pourquoi est ce maladroit de commencer par stocker `diff(1/pf(x),x)` ?

Exercice IV: Mini texte[3] sur la Décomposition de "Dunford"

Nous allons donc fournir une preuve algorithmique de cette décomposition qui permettra de résoudre ces problèmes.

Soit k un corps de caractéristique nulle, et $k[u]$ une k-algèbre de dimension finie. Notons m le polynôme minimal de u sur k. (On suppose $\deg m > 1$). On a alors $k[u] \simeq k[X]/(m)$. Il s'agit de montrer qu'il existe des éléments[4] s_u, n_u de $k[u]$ tels que : $u = s_u + n_u$, le polynôme minimal de s_u soit sans facteurs multiples, et que n_u soit nilpotent. Nous allons pour cela créer une suite récurrente comme dans la méthode de Newton, qui sera stationnaire de limite s_u. Notons $\mathcal{N}$ le radical nilpotent de $k[u]$, autrement dit l'ensemble des éléments nilpotents de $k[u]$ (c'est un idéal, et on pourrait montrer que c'est l'intersection des idéaux premiers de $k[u]$ ce que l'on n'utilisera pas). Notons $p(u)$ un générateur de $\mathcal{N}$ où $p \in k[X]$. On remarque alors que l'on peut supposer que p divise m et qu'il est sans facteurs multiples, ce que nous ferons à partir de maintenant. nous allons trouver un élément s dans $k[u]$ tel que $p(s) = 0$ par la méthode de Newton (Qui se terminera ici en un nombre fini d'itérations).

Comme p et p' sont premiers entre eux, on peut écrire un multiple de $p'(u)$ comme la somme d'un élément nilpotent et d'un inversible, ce qui prouve que $p'(u)$ est un inversible de $k[u]$.

On considère alors la suite récurrente d'éléments de $k[u]$:

$$u_0 = u, u_{n+1} = u_n - p(u_n)/p'(u_n)$$

On pourrait montrer de l'on a dans $k[X, Y]$:

$$p(X + Y) - p(X) - Y.p'(X) \in (Y^2)$$

On en déduit donc que si la suite est bien définie jusqu'à l'entier n (ie $p'(u_{n-1})$ est inversible dans $k[u]$), alors $p(u_n) \in \mathcal{N}^{2^n}$. Nous pouvons alors montrer que u_{n+1} existe encore lorsque n est supérieur à 1 puisque $p'(u_n) - p'(u_{n-1})$ est nilpotent. Il est en effet dans l'idéal engendré par $u_n - u_{n-1}$ qui est inclus dans $(p(u_{n-1})) \subset \mathcal{N}$, et comme l'anneau $k[u]$ est commutatif, la somme d'un nilpotent et d'un inversible est un inversible. On peut donc conclure que $p'(u_n)$ est inversible et donc que u_{n+1} existe.

Il est maintenant clair que la suite u_n est constante à partir d'un certain rang, notons s_u sa limite, alors l'élément $n_u = u - s_u$ est nilpotent et p est le polynôme minimal de s_u.

1) a) On souhaite illustrer l'algorithme sur un exemple à coefficients entiers où l'algorithme fait au moins deux itérations avec des valeurs propres différentes et non rationnelles. Prenons par exemple une matrice diagonale par blocs constituée de deux blocs companions associés aux polynômes :

$$(x^3 - 2)^5, \ x^5 - 2x^2$$

b) Pour mieux comprendre l'implémentation de cet algorithme, effectuez la première itération en mode intéractif.

c) Programmez cette methode pour trouver la réduction de Dunford de votre exemple, et vérifier que N et S commutent bien.

2) Expliquer pourquoi p est sans facteurs multiples, et comment trouver facilement p à partir de m. Justifier la caractéristique nulle.

3) On pourra expliquer pourquoi dans un anneau commutatif la somme d'un inversible et d'un nilpotent est un inversible

4) Pourquoi n_u est il nilpotent, et pourquoi p est il le polynôme minimal de s_u

5) a) Expliquer le lien avec la décomposition de Dunford.

b) Montrer que l'on peut travailler avec le polynôme caractéristique à la place du polynôme minimal.

---

3. Cf leçon polynômes d'endomorphismes, ...
4. décomposition semi-simple+nilpotent