Exercice I: Mini texte sur le grand théorème de Poncelet[1]

On considère 2 coniques C_1 et C_2 non dégénérées du plan affine $\mathbb{R}^2$.

1 La correspondance biquadratique

On rappelle que si C_1 a pour équation : $\begin{pmatrix} x & y & 1 \end{pmatrix}.B.\begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix} = 0$ où B est symétrique alors la tangente à C_1 en un point (x_0, y_0) de C_1 a pour équation : $\begin{pmatrix} x_0 & y_0 & 1 \end{pmatrix}.B.\begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix} = 0$. On en déduit donc qu'une droite affine d'équation $u_0.x + u_1 y + u_2 = 0$ est tangente à C_1 si et seulement si $\sum_{0 \leq i,j \leq 2} a_{i,j} u_i.u_j = 0$ où A est l'inverse[2] de B. On suppose[3] de plus que C_2 est paramétrée par (t^2, t), on notera m_t le point de C_2 correspondant. Pour deux points distincts de C_2 : m_t et m_u, la droite $(m_t m_u)$ est tangente à C_1 si et seulement si t, u vérifient une équation du type : $P(t, u) = 0$ où P est un polynôme symétrique[4] en t, u de degré 2 en t et aussi en u. On notera $P(t, u) = a(u)t^2 + b(u)t + c(u)$.

Pour $t_0 \in \mathbb{R}$, on note $\{t_1, t_{-1}\}$ les racines (éventuellement complexes) de $P(t, t_0) = 0$. Pour $i \in \mathbb{N}^*$, on note t_{i+1} la racine du polynôme[5] $\dfrac{P(t, t_i)}{(t - t_{i-1})}$ et t_{-i-1} la racine du polynôme $\dfrac{P(t, t_{-i})}{(t - t_{1-i})}$. On remarquera que si t_1 ou t_{-1} est réel, alors $\forall i \in \mathbb{Z}$, $t_i \in \mathbb{R}$.

De plus, on montre facilement que t_{i+1} s'exprime en fonction de t_{i-1} et de $a(t_i), b(t_i)$, ce qui nous permet d'obtenir les t_i par récurrence, et aussi d'affirmer que t_i sera toujours une fraction rationnelle en t_1, et que $t_i + t_{-i}$ et $t_i.t_{-i}$ seront des fractions rationnelles en t_0. Nous aurons en fait un résultat plus précis que l'on pourra admettre[6] :

Proposition 1 *Pour tout $i \in \mathbb{N}^*$, il existe une conique Γ_i telle que pour tout choix de t_0, si t_i et t_{-i} sont distincts et réels, la droite $(m_{t_i} m_{t_{-i}})$ est tangente à Γ_i. De plus, si C_1 et C_2 se coupent en 4 points distincts, alors Γ_i contient $C_1 \cap C_2$.*

2 Paires de Poncelet

On dit que C_1 et C_2 sont en situation de Poncelet, s'il existe un polygône à n côtés, avec $n \geq 3$ dont les sommets soient sur C_2 et les côtés soient tangents à C_1. (On entend par polygône la donnée d'un ensemble de n points du plan indexés par $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$. Ces points seront appelés des sommets, et on definit les cotés du polygône comme les droites passant par 2 sommets dont la différence des indices fait ± 1. Le théorème de Poncelet affirme que si deux coniques sont en situation de Poncelet pour un polygône à n côtés, alors toute tangente à C_1 est un coté d'un polygône ayant ses n sommets sur C_2 et ses n cotés tangents à C_1.

Lorsque $3 \leq n \leq 5$, il est très facile[7] de produire des exemples de coniques en situation de Poncelet. En revanche, pour $n \geq 6$ ça n'est pas si simple.

---

[1] Cf Samuel. Appendice sur les correspondances (2,2)

[2] B est inversible car C_1 est non dégénérée

[3] Commentez cette hypothèse

[4] que l'on peut expliciter en fonction de A

[5] pourquoi est ce un polynôme ?

[6] On pourra d'abord essayer d'illustrer cette proposition graphiquement mais aussi symboliquement. On pourra aussi expliquer comment obtenir l'équation cartésienne d'une conique dont on connait une forme paramétrique de la duale.

[7] Expliquer pourquoi. On pourra éventuellement produire un tel exemple.

2.1 Exemple : cercles concentriques

On peut par exemple regarder le cas où C_i a pour équation $x^2 + y^2 = r_i^2.z^2$, et même raisonner dans le plan affine réel Euclidien avec $r_1 < r_2$. Dans ce cas, le polygône a n côtés est forcémenent régulier, et il existe si et seulement si $\frac{r_1}{r_2} = \cos(\frac{\pi}{n})$. Donc deux cercles concentriques ne sont pas toujours en situation de Poncelet.

Bien qu'il soit toujours possible de faire un changement de repère projectif (sur $\mathbb{C}$) qui ramène l'équation d'une conique non dégénérée sous la forme $x^2 + y^2 = r^2.z^2$, il n'est pas toujours possible[8] de transformer simultanément les équations de C_1 et C_2 sous la forme $x^2 + y^2 = r_i^2.z^2$. L'étude des cercles concentriques est donc trop restrictive. On peut par exemple produire facilement une paire de coniques en situation de Poncelet avec $n = 3$ qui ne puisse pas être obtenue depuis l'exemple précédent par changement de repère projectif.

[8] comme l'indique leur intersection avec la droite d'equation $z = 0$