```
    |\^/|     Maple 9 (IBM INTEL LINUX)
._|\|   |/|_. Copyright (c) Maplesoft, a division of Waterloo Maple Inc. 2003
 \  MAPLE  /  All rights reserved. Maple is a trademark of
 <____ ____>  Waterloo Maple Inc.
      |       Type ? for help.
>  interface(screenwidth=120);
>  #On peut param{\'e}trer les equations cart{\'e}siennes, ie on en choisit 2
>  # ind{\'e}pendantes et on regarde leur combinaisons lineaire, ou bien on
>  #considere une droite projective d ne passant pas par le point O, et
>  #l'on  identifie les droites passant par O aux droites (OM) lorsque M decrit D
>  with(LinearAlgebra):
>  A:=Matrix(2,2,a);
                                            [a(1, 1)    a(1, 2)]
                                       A := [                  ]
                                            [a(2, 1)    a(2, 2)]

>  #sx+ty=0 -> dte passant par O_2 et V=(s',t',t') ou (s',t')=h(s,t)
>  V:=A.Matrix([[s],[t]]);
                                           [a(1, 1) s + a(1, 2) t]
                                      V := [                     ]
                                           [a(2, 1) s + a(2, 2) t]

>  #On etudie O_2+l.V inter sx+ty=0
>  xo2:=0;yo2:=1;zo2:=0;# les coordonees de O_2
                                                xo2 := 0

                                                yo2 := 1

                                                zo2 := 0

>  #c'est plus simple de prendre 1 forme cartesienne, et une parametrique.
>  X:=xo2+l*V[1,1];Y:=yo2+l*V[2,1];Z:=zo2+l*V[2,1];
                                       X := l (a(1, 1) s + a(1, 2) t)

                                     Y := 1 + l (a(2, 1) s + a(2, 2) t)

                                       Z := l (a(2, 1) s + a(2, 2) t)

>  L:= solve(s*X+t*Y=0,l);#Attention solve travaille generiquement: par exemple si a(1,1) est nul, il faudrait simplifie
r par t
                                                           t
                          L := - --------------------------------------------------
                                   2                                              2
                                  s  a(1, 1) + s a(1, 2) t + t a(2, 1) s + a(2, 2) t

>  # NB det(A) n'est pas nul, donc sa seconde ligne non plus.
>  # Pb solve a suppose que l'un des 2 coeffs de la seconde ligne est nul en s=0 ou t=0
>  # le point d'intersection est:
>  S:=Vector([xo2+L*V[1,1],yo2+L*V[2,1],zo2+L*V[2,1]]);
                                         [   t (a(1, 1) s + a(1, 2) t) ]
                                         [ - ------------------------- ]
                                         [              %1             ]
                                         [                             ]
                                         [    t (a(2, 1) s + a(2, 2) t)]
                                    S := [1 - -------------------------]
                                         [               %1            ]
                                         [                             ]
                                         [   t (a(2, 1) s + a(2, 2) t) ]
                                         [ - ------------------------- ]
                                         [              %1             ]

                                 2                                              2
                          %1 := s  a(1, 1) + s a(1, 2) t + t a(2, 1) s + a(2, 2) t

>  # a(1,1)=0 pose PB.
>  S:=simplify(S*%1);#si a(1,1)=0 ca n'est pas bon, il faut simplifier par t
                                          [-t (a(1, 1) s + a(1, 2) t)]
                                          [                          ]
                                     S := [s (a(1, 1) s + a(1, 2) t) ]
                                          [                          ]
                                          [-t (a(2, 1) s + a(2, 2) t)]

>  #version affine  z=1
>  #Moralement X:=S[1]/S[3];Y:=S[2]/S[3];
>  X:='X':Y:='Y':Z:='Z':
>  P:=subs({t=1},X*S[3]-S[1]);Q:=subs({t=1},Y*S[3]-S[2]);
                               P := -X (a(2, 1) s + a(2, 2)) + a(1, 1) s + a(1, 2)

                             Q := -Y (a(2, 1) s + a(2, 2)) - s (a(1, 1) s + a(1, 2))

>  R:=resultant(P,Q,s);
                     2         2                              2
R := -a(1, 1) X  a(2, 2)  + a(1, 1) X a(2, 2) a(1, 2) - Y a(2, 1)  X a(1, 2) + Y a(2, 1) a(1, 1) X a(2, 2)

                                                  2                              2                              2
     + Y a(2, 1) a(1, 1) a(1, 2) + a(1, 2) X  a(2, 1) a(2, 2) - a(1, 2)  X a(2, 1) - Y a(2, 2) a(1, 1)

>  #equation homogene:
>  factor(Z^2*subs({X=X/Z,Y=Y/Z},R));
                                                                   2
             -(a(1, 1) a(2, 2) - a(2, 1) a(1, 2)) (Z Y a(1, 1) + X  a(2, 2) - Y a(2, 1) X - X a(1, 2) Z)

>  #detA se factorise et il  est non nul
>  eq:=simplify(%/Determinant(A));
                                                    2
                             eq := -Z Y a(1, 1) - X  a(2, 2) + Y a(2, 1) X + X a(1, 2) Z

>  f:=(x,y,z)->subs({X=x,Y=y,Z=z},eq);
                                     f := (x, y, z) -> subs({X = x, Y = y, Z = z}, eq)

>  f(0,0,1);f(xo2,yo2,zo2);#sont solutions evidentes.
```

```
                                                      0

                                                      0

>  # la droite (O_1O_2) a pour equation yo2.x-xo2.y=0, ie (s,t)=(yo2,-xo2) dans le
>  #faisceau sx+ty=0. En revanche on a parametre le faisceau en O_2
>  #grace au point (s',t',t') qui est sur la droite (O_1O_2) ssi s'.yo2-xo2.t'=0.
>  # on doit donc exprimer h(yo2,-xo2) proportionnel a (xo2,yo2).
>  V1:=A.Matrix([[yo2],[-xo2]]);
                                                           [a(1, 1)]
                                                     V1 := [       ]
                                                           [a(2, 1)]

>  V2:=Matrix([[xo2],[yo2]]);
                                                              [0]
                                                        V2 := [ ]
                                                              [1]

>  casparticulier:=Determinant(Matrix([V1,V2]));
                                                 casparticulier := a(1, 1)

>  subs({casparticulier=0},f(x,y,z));
                                               2
                                            -x  a(2, 2) + y a(2, 1) x + x a(1, 2) z

#l'equation de degre 2 se  factorise par  x ssi A[1,1]=0 ssi h(O_1O_2)=(O_1O_2)
>  # on recommence avec un autre O_2
>  xo2:=1;yo2:=0;zo2:=1;# les coordonees de O_2
                                                        xo2 := 1

                                                        yo2 := 0

                                                        zo2 := 1

>  X:=xo2+l*V[1,1];Y:=yo2+l*V[2,1];Z:=zo2+l*V[2,1];
                                              X := 1 + l (a(1, 1) s + a(1, 2) t)

                                                Y := l (a(2, 1) s + a(2, 2) t)

                                              Z := 1 + l (a(2, 1) s + a(2, 2) t)

>  L:= solve(s*X+t*Y=0,l);
                                                              s
                                  L := - --------------------------------------------------
                                           2                                              2
                                          s  a(1, 1) + s a(1, 2) t + t a(2, 1) s + a(2, 2) t

>  # NB det(A) n'est pas nul, donc sa seconde ligne non plus.
>  # Pb solve a suppose que l'un des 2 coeffs de la seconde ligne est nul en s=0 ou t=0
>  # le point d'intersection est:
>  S:=Vector([xo2+L*V[1,1],yo2+L*V[2,1],zo2+L*V[2,1]]);
                                                 [    s (a(1, 1) s + a(1, 2) t)]
                                                 [1 - -------------------------]
                                                 [               %1            ]
                                                 [                             ]
                                                 [   s (a(2, 1) s + a(2, 2) t) ]
                                            S := [ - ------------------------- ]
                                                 [              %1             ]
                                                 [                             ]
                                                 [    s (a(2, 1) s + a(2, 2) t)]
                                                 [1 - -------------------------]
                                                 [               %1            ]

                                         2                                              2
                                  %1 := s  a(1, 1) + s a(1, 2) t + t a(2, 1) s + a(2, 2) t

>  S:=simplify(S*%1);#ici ca n'est pas correct si a(2,2)=0, et s=0.
                           [                          t (a(2, 1) s + a(2, 2) t)                                    ]
                           [                                                                                       ]
                      S := [                         -s (a(2, 1) s + a(2, 2) t)                                    ]
                           [                                                                                       ]
                           [ 2                                               2              2                      ]
                           [s  a(1, 1) + s a(1, 2) t + t a(2, 1) s + a(2, 2) t  - a(2, 1) s  - s a(2, 2) t]

>  #pour calculer le resultant on travaille a une variable: ex on fait t=1
>  L1:=s*x+y;
                                                      L1 := s x + y

>  #cette fois, On parametre les droites passant par O_2 via les equations
>  #les droites passant par (1,0,1) sont: s'*(x-z)+t'*y
>  L2:=(Matrix([x-z,y]).A.Matrix([[s],[1]]))[1,1];
                                L2 := ((x - z) a(1, 1) + y a(2, 1)) s + (x - z) a(1, 2) + y a(2, 2)

>  resultant(L1,L2,s);#On a l'equation cartesienne tout de suite
                                                               2                                2
                        -x a(1, 2) z + x y a(2, 2) + a(1, 2) x  - y a(1, 1) x + z y a(1, 1) - y  a(2, 1)

>  # signature (3,0) pas de sols r{\'e}elles non nulles.
>  #Y^2-XZ=Y^2+1/2(X-Z)^2-1/2(X+Z)^2
>  #est parametree par (u,v)->(u^2,uv,v^2)
>  H:=Matrix(2,2,h):f:=s->[s[1]^2,s[1]*s[2],s[2]^2];
                                                      2                 2
                                         f := s -> [s[1] , s[1] s[2], s[2] ]

>  #equation de la droite passant par 2 points donnes:
>  eqdte:=(V1,V2)->Determinant(Matrix([V1,V2,[x,y,z]]));
                       eqdte := (V1, V2) -> LinearAlgebra:-Determinant(Matrix([V1, V2, [x, y, z]]))

>  #M:=Vector(2,m);
>  M:=Vector([1,0]);N:=Vector(2,n);
                                                           [1]
```

```
                                                    M := [ ]
                                                         [0]

                                                       [n(1)]
                                                  N := [    ]
                                                       [n(2)]

>  eqdte(f(M),f(H.N));factor(%);
                  2                                                                          2
z h(1, 1) n(1)  h(2, 1) + z h(1, 1) n(1) h(2, 2) n(2) + z h(1, 2) n(2) h(2, 1) n(1) + z h(1, 2) n(2)  h(2, 2)

                    2     2                                               2     2
     - y h(2, 1)  n(1)  - 2 y h(2, 1) n(1) h(2, 2) n(2) - y h(2, 2)  n(2)

           (h(2, 1) n(1) + h(2, 2) n(2)) (-n(1) y h(2, 1) + n(1) z h(1, 1) - y h(2, 2) n(2) + z h(1, 2) n(2))

>  #On peut simplifier les 2 equations (H bij, N non nul)
>  D1:=simplify(eqdte(f(M),f(H.N))/(H.N)[2]);
                        D1 := -n(1) y h(2, 1) + n(1) z h(1, 1) - y h(2, 2) n(2) + z h(1, 2) n(2)

>  factor(eqdte(f(N),f(H.M)));
          -(-h(2, 1) n(1) + h(1, 1) n(2)) (-h(1, 1) y n(2) + n(1) z h(1, 1) + x h(2, 1) n(2) - n(1) y h(2, 1))

>  D2:=factor(eqdte(f(N),f(H.M)))/(H[1,1]*N[2]-H[2,1]*N[1]);
                        D2 := h(1, 1) y n(2) - n(1) z h(1, 1) - x h(2, 1) n(2) + n(1) y h(2, 1)

>  #Sous forme parametrique, on voit que c'est de degre 1 en N
>  solve({D1=0,D2=0},{x,y,z});
               z (h(1, 1) n(1) + h(1, 2) n(2))
{z = z, y = -------------------------------,
                 h(2, 1) n(1) + h(2, 2) n(2)

                        2
        z (h(1, 1)  n(1) + h(1, 1) n(2) h(1, 2) - h(1, 1) n(1) h(2, 2) + h(1, 2) h(2, 1) n(1))
    x = -------------------------------------------------------------------------------------}
                                (h(2, 1) n(1) + h(2, 2) n(2)) h(2, 1)

>  #equation de la droite:
>  e:=solve({D1=0},{N[1]});
                                                 n(2) (-y h(2, 2) + z h(1, 2))
                                  e := {n(1) = - -----------------------------}
                                                    -y h(2, 1) + z h(1, 1)

# Lorsque n varie, l'intersection decrit la droite d'equation:
>  factor(subs({N[2]=1},subs(e,D2)));
                                  z h(1, 2) + h(1, 1) y - x h(2, 1) - y h(2, 2)

>  # pour obtenir l'equation cartesienne de l'intersection,
>  #il suffit d'eliminer les parametres de  N dans les equations D1,D2.
>  L:='L':P:=subs({N[1]=L,N[2]=1},D1);Q:=subs({N[1]=L,N[2]=1},D2);
                             P := -L y h(2, 1) + L z h(1, 1) - y h(2, 2) + z h(1, 2)

                              Q := h(1, 1) y - L z h(1, 1) - x h(2, 1) + L y h(2, 1)

>  resultant(P,Q,L):factor(%);
                       -(-y h(2, 1) + z h(1, 1)) (-z h(1, 2) - h(1, 1) y + x h(2, 1) + y h(2, 2))

>  eqdte(f(M),f(H.M));
bytes used=4000096, alloc=3276200, time=0.12
                                                                    2
                                        h(1, 1) h(2, 1) z - h(2, 1)  y

>  # la droite (Mh(M)) apparait avec le resultant, correspondant au cas N=M
>  # On choisit une homographie h pour faire un dessin.
>  M:=t->(t^2,t);
                                                              2
                                                 M := t -> (t , t)

>  HM:=proc(t)
>  h:=Matrix([[1,1],[1,2]]);
>  v:=h.Vector([t,1]);
>  (v[1]/v[2])^2,v[1]/v[2];
>  end proc;
 HM := proc(t) local h, v; h := Matrix([[1, 1], [1, 2]]); v := h . (Vector([t, 1])); v[1]^2/v[2]^2, v[1]/v[2] end proc

>  with(plots):with(plottools):
>  C:=plot([M(t),t=-infinity..infinity],numpoints=200):
>  #HC:=plot([M(t),t=-infinity..infinity]); #verif C=HC: OK
>  #display({C,HC},view=[-5..5,-5..5]);
>  #2 point A,M, et les droites (A,HM), (M,HA)
>  d1:=(t,c)->line([M(0.)],[HM(t)],color=c);d2:=(t,c)->line([M(t)],[HM(0.)],color=c);
                                  d1 := (t, c) -> line([M(0.)], [HM(t)], color = c)

                                  d2 := (t, c) -> line([M(t)], [HM(0.)], color = c)

>  A:=d1(1.,blue),d2(1.,blue);
A := CURVES([[0., 0.], [0.4444444444, 0.6666666667]], COLOUR(RGB, 0., 0., 1.00000000)),

    CURVES([[1., 1.], [0.2500000000, 0.5000000000]], COLOUR(RGB, 0., 0., 1.00000000))

>  B:=d1(15,green),d2(15,green);
B := CURVES([[0., 0.], [0.8858131488, 0.9411764706]], COLOUR(RGB, 0., 1.00000000, 0.)),

    CURVES([[225., 15.], [0.2500000000, 0.5000000000]], COLOUR(RGB, 0., 1.00000000, 0.))

>  E:=d1(2.,yellow),d2(2.,yellow);
E := CURVES([[0., 0.], [0.5625000000, 0.7500000000]], COLOUR(RGB, 1.00000000, 1.00000000, 0.)),

    CURVES([[4., 2.], [0.2500000000, 0.5000000000]], COLOUR(RGB, 1.00000000, 1.00000000, 0.))

>  display({C,A,B,E},view=[0..1,-1..1]);
```

```
 1 +                                                                                               AAA*************
   +                                                                                  AAAAAA****************D
0.8+                                                                  AAA***A*********DD****BBBBBB   CCCCCCCCCCCCCCCCCCC
   +                                                    AA**************D*************CCCCCCCCCCCC
0.6+                                     A****************CCCCCCC*******BBB         BBBBBBBBBBBBBBBBBBBBBBBBBBBBBBBBBB
   +                           AAAAAAA*****************BBBBBBBBBBBBBBBBBBBBBBBBBBBBBBB
0.4+                   AAAAAAAA     DDD****CCC*BBBBBBBBBB
   +             AAAAAA      DD********BBBBBBB
0.2+   AAAA    DD********BBBBB
   +AA D********BBB
   ******---+----+---+----+---+----+---+----+---+----+---+----+---+----+---+----+---+----+---+----+---+----+---+----+
   +AA                  0.2                   0.4                    0.6                    0.8
-0.2   AAAA
   +       AAAAAA
-0.4             AAAAAAAA
   +                     AAAAAAAAAA
-0.6                               AAAAAAAAAAAAA
   +                                            AAAAAAAAAAAAAAA
-0.8                                                          AAAAAAAAAAAAAAAAA
   +                                                                           AAAAAAAAAAAAAAAAAA
-1 +                                                                                           AAAAAAAAAAAAAAAA

> quit
bytes used=5641968, alloc=3276200, time=0.17
```