Université de Paris 7 | **Exercices du 13-10-2006** | **agreg 2007 (F.Han)**

Exercice I: Groupe opérant sur un ensemble

1) Donner des exemples d'action à droite et à gauche de $GL_n(k)$ sur $M_n(k)$.

2) a) Soit k un corps commutatif. Montrer que l'on peut définir une action (on précisera de quel côté) de $\mathfrak{S}_n$ sur $k[x_1,\dots,x_n]$ par $(\sigma, P(x_1,\dots,x_n)) \mapsto P(x_{\sigma(1)},\dots,x_{\sigma(n)})$.

b) Que peut on dire de plus sur l'application $\rho(\sigma) : P(x_1,\dots,x_n)) \mapsto P(x_{\sigma(1)},\dots,x_{\sigma(n)})$.

3) On note Λ_n l'ensemble des invariants[1] de $k[x_1,\dots,x_n]$ par) $\mathfrak{S}_n$. Pour $r \leq n$, pour toute suite décroissante $\lambda = (\lambda_1,\dots,\lambda_r)$ on note O_λ l'orbite de $X_1^{\lambda_1}\dots X_r^{\lambda_r}$. On pose $m_\lambda = \sum_{M\in O_\lambda} M$.

a) Calculer $m_{(1,\dots,1)}$. Dans la suite, on notera ce polynôme e_r, où r est le nombre de 1.

b) Pour $n=3$, calculer $m_{(3,2)}$.

c) On considère l'ordre lexicographique inverse sur les partitions[2] d'un même entier. Autrement dit, pour 2 suites décroissantes a et b telles que $\sum_{i=1}^r a_i = \sum_{i=1}^r b_i$, on dira que $a > b$ si le premier des indices i tels que $a_i \neq b_i$ est tel que $a_i > b_i$. On dira aussi dans ce cas que $x_1^{a_1}\dots x_n^{a_n} > x_1^{a_1}\dots x_n^{a_n}$. Quel est le plus grand élément de O_λ?

d) Quel est le plus grand monôme apparaissant dans la somme $e_5.e_4.e_3.e_1$?

e) Soit λ' la partition conjuguée de λ: λ'_i est le cardinal de $\{j, \lambda_j \geq i\}$. (faire le dessin des boites). Montrer que $e_{\lambda'_1}\dots e_{\lambda'_r} = m_\lambda + \sum_{\mu<\lambda} a_{\lambda,\mu}.m_\mu$ où $a_{\lambda,\mu}\in k$, et μ désigne une partition telle que $|\lambda| = |\mu|$.

f) Conclure que tout élément de Λ_n s'écrit de manière unique comme un polynôme en $e_1,\dots,e_n$.

Exercice II: Pbs de factorialité

1) Donner des exemples d'anneaux factoriels.

2) a) Soit $z \in \mathbb{Z}[i\sqrt{5}]$. On note $N(z)$ le déterminant[3] de la multiplication par z. Montrer que: (z est inversible dans $\mathbb{Z}[i\sqrt{5}]$) $\iff N(z) = \pm 1$

b) Déterminer les inversibles de $\mathbb{Z}[\sqrt{-5}]$.

c) Montrer que $1 + i\sqrt{5}$ est irréductible dans $\mathbb{Z}[i\sqrt{5}]$.

d) Montrer que 2 et 3 sont irréductibles dans $\mathbb{Z}[i\sqrt{5}]$.

e) $\mathbb{Z}[i\sqrt{5}]$ est il factoriel?

Exercice III: Résultant, exemple de calculs génériques.[4]

1) Soient A un anneau intègre, P, Q des éléments de $A[X]$ de degré p et q. On note R_n l'ensemble des éléments de $A[X]$ de degré strictement inférieur à n.

a) On considère l'application ϕ de $R_q \times R_p \to R_{p+q}, (U,V) \mapsto PU + VQ$. Quelle est la matrice $R(P,Q)$ de ϕ pour la base $(X^{q-1},0),\dots,(1,0),(0,X^{p-1}),\dots,(0,1)$ de $R_q\times R_p$ et $(X^{p+q-1},\dots,1)$ de R_{p+q}.

b) Montrer[5] que ϕ n'est pas injective si et seulement si $\det(R(P,Q)) = 0$

c) En déduire que P et Q ont un multiple commun de degré strictement inférieur à $p+q$ si et seulement si $\det R(P,Q) = 0$

d) En déduire que dans un anneau factoriel[6] on a:
$\det R(P,Q) = 0$ si et seulement si P et Q ont un facteur commun de degré au moins 1

e) On pose $A = k[u_1,\dots,u_p,v_1,\dots,v_q]$ où k est un corps commutatif. $P = (X-u_1)\dots(X-u_p)$, $Q = (X-v_1)\dots(X-v_q)$. Montrer qu'il existe $a\in k$ tel que $R(P,Q) = a.\prod_{i=1}^p\prod_{j=1}^q (u_i - v_j)$.

2) On considère l'anneau $A = \mathbb{Q}[X_1,X_2,Y_1,Y_2]/(X_1Y_2 - X_2Y_1)$. On note en minuscule les classes de X_i, Y_i. On considère les éléments de $A[X]$ suivant: $P = x_1X + x_2$, $Q = y_1X + y_2$.

a) Montrer que A est intègre.

b) Calculer le résultant de P et Q, montrer que P et Q n'ont pas de facteurs commun dans $A[X]$. A est il factoriel?

---

[1] ie les polynômes symétriques

[2] $\lambda = (\lambda_1,\dots,\lambda_r)$ est une partition de k si c'est une suite décroissante d'entier naturels de somme k et notée $|\lambda|$

[3] Cf: appications du determinant

[4] Cf par ex merindol p230 pour le vandermonde, et p 378 pour le résultant

[5] Si l'on préfère travailler sur un corps, on peut penser à la leçon sur les corps de fractions

[6] pgcd,ppcm