Université de Paris 7 | **Exercices: Anneaux** | **agreg 2007 (F.Han)**

Exercice I:

Soit d un entier. On note $\sqrt{d}$ une racine complexe de d.

1) Montrer que 2 n'est pas premier dans $\mathbb{Z}[\sqrt{d}]$.

2) En considérant $N : \mathbb{Z}[\sqrt{d}] \to \mathbb{Z}$ telle que $N(a+b\sqrt{d}) = a^2 - db^2$ pour $a, b \in \mathbb{Z}$. Montrer que si $d \leq -3$, alors 2 est irréductible dans $\mathbb{Z}[\sqrt{d}]$.

3) a) Montrer que $\forall x \in \mathbb{Q}, \exists r \in \mathbb{Z}$ tel que $|x - r| \leq \frac{1}{2}$.

b) En déduire avec l'aide de N que $\mathbb{Z}[\sqrt{-2}]$ est Euclidien.

4) Montrer que pour $d < 0$, $\mathbb{Z}[\sqrt{d}]$ est principal si et seulement si $d = -1$ ou $d = -2$.

Exercice II: Idéaux premiers[1] de $k[x,y]$

Soit k un corps commutatif infini. Nous allons montrer que les idéaux premiers de $k[x,y]$ sont principaux ou maximaux. On étudiera ensuite les idéaux maximaux dans le cas où k est algébriquement clos.

1) Rappel: Soit A un anneau principal. Montrer que les idéaux premiers de A sont nuls ou maximaux.

2) Montrer qu'un idéal principal de $k[x,y]$ n'est pas maximal.

3) Soient F et P des éléments de $k[x,y]$, tel que P soit non nul. Montrer qu'il existe Q et R de $k[x,y]$ et a de $k[x] - \{0\}$ tels que: $a.F = PQ + R$ et $\deg_Y(R) < \deg_Y(P)$

4) Soit $\mathcal{M}$ un idéal premier non principal de $k[x,y]$

a) Montrer qu'il existe dans $\mathcal{M}$ des polynômes irréductibles P et Q, tels que P appartienne à $k[x]$ et Q à $k[y]$.

b) En déduire que $\mathcal{M}$ est maximal et que $k[x,y]/\mathcal{M}$ est un k-espace vectoriel de dimension finie.

c) Si k est algébriquement clos, montrer que $\mathcal{M}$ est de la forme $(x-a, y-b)$ où $(a,b) \in k^2$. (Cf Th des zéros de Hilbert)

Exercice III: Matrices[2] à coefficients dans un anneau principal

Soit R un anneau principal. Il s'agit ici d'étudier les classes d'équivalences de matrices à coefficient dans R. On remarquera quelques differences avec l'algorithme analogue dans le cadre Euclidien. Pour $a, b \in R$, on notera $a \wedge b$ un générateur de l'idéal (a,b). Soit $A = (a_{i,j})$ un élément de $M_n(R)$.

1) Pour $a, b \in R$, trouver une matrice U de déterminant 1 à coefficients dans R telle que:

$$\begin{pmatrix} a & b \\ . & . \end{pmatrix} .U = \begin{pmatrix} a \wedge b & 0 \\ . & . \end{pmatrix}$$

a) Soient $i, j, l \in \{1 \dots n\}$. Déduire du 1) que A est $GL(R)$-équivalente à une matrice dont le coefficient (i,j) soit $a_{i,j} \wedge a_{i,l}$.

2) On note $\mathcal{P}$ l'ensemble des idéaux premiers de R. On introduit $F : R \to \mathbb{N}, a \mapsto \sum_{(p)\in\mathcal{P}} v_p(a)$ où $v_p(a) = max\{i | a \in (p^i)\}$.

a) Remarquer que pour tout a de R, la somme est finie, et que si $a|b$, $F(a) \leq F(b)$.

3) Si $M \in \mathcal{M}_n(R)$ on note $m(M) = \min\{F(m_{i,j}) | 1 \leq i,j \leq n, m_{i,j} \neq 0\}$

a) Notons a et b les entiers tels que $M_{a,b} = m(M)$. Montrer que si $M_{a,b}$ ne divise pas tous les coefficients de M non nuls qui sont sur la ligne a ou la colonne b, alors il exite une matrice $U \in GL_n(A)$ telle que $m(UM) < m(M)$ ou bien $m(MU) < m(M)$.

b) En déduire que M est $GL(R)$-équivalente à une matrice N telle que $m(N)$ soit réalisé en un coefficient $N_{a',b'}$ qui divise tout les coefficients non nuls de la ligne a' et de la colonne b'.

c) Conclure que M est $GL(R)$-équivalente à une matrice diagonale, puis à une matrice diagonale de diviseurs successifs.

[1] Cf par exemple Francinou-Gianella

[2] Cf par exemple Arnaudies-Bertin Tome2, XIII.2 p 125. Existence: Th XIII.5 p126.