Université de Paris 7 **agreg 2006**
(F.Han)

Exercices de géométrie

Exercice I:

Soient $\mathcal{E}$ un espace affine de dimension 3, et A, B, C, D un tétraèdre de $\mathcal{E}$. Montrer que les droites joignant les milieux des cotés opposés du tetraèdre sont concourantes. (On pourra utiliser des barycentres)

Exercice II:

Soit $\mathcal{E}$ un espace affine sur un corps commutatif k, et $P_0, \dots, P_n$ des points de $\mathcal{E}$. On note $\mathcal{A}$ l'espace affine engendré par ces points. On dit que $P_0, \dots, P_n$ sont affinement dépendants si $\dim \mathcal{A} < n$. (Par definition $\dim \mathcal{A} = \dim \vec{\mathcal{A}}$.

1) Completer b) et c) pour que les 3 assertions suivantes soient équivalentes, puis prouver ces équivalences:

a) $P_0, \dots, P_n$ sont affinement dépendants

b) $\boxed{}, \boxed{} \in Aff(\bigcup_{\boxed{}} P_j)$ (Où Aff désigne l'espace affine engendré)

c) $\boxed{}(\lambda_0, \dots, \lambda_n) \in (k^n)^*, \boxed{}\, O \in \mathcal{E}, \sum_{i=0}^{n} \lambda_i \overrightarrow{OP_i} = \vec{0}$

2) Si l'assertion précédente est réalisée, que pouvez vous dire de $\sum_{i=0}^{n} \lambda_i$?

Exercice III:

Soit $\mathcal{E}$ un plan affine, et A, B, C 3 points affinement indépendants.

1) a) Pour $i \in \{1, 2, 3\}, M_i$ est le point de coordonnées barycentriques (x_i, y_i, z_i) dans le repère (A,B,C). Montrer que:

$$M_1, M_2, M_3 \text{ sont alignés} \Leftrightarrow \begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \\ z_1 & z_2 & z_3 \end{vmatrix} = 0$$

b) Donner les équations barycentriques des droites (AB), (AC), (BC)

2) Soient I, J, K les milieux respectifs de [BC], [AC], [AB]. Soit M un point de $\mathcal{E}$ distinct de A,B,C, de coordonnées barycentriques (α, β, γ) dans(A,B,C). On note A' (resp.B',C') le symétrique de M par rapport à I (resp. J, K). Donner les coordonnées barycentriques de A', B', C' en fonction de α, β, γ dans le repère (A,B,C).

3) Montrer que les droites (AA'), (BB'), (CC') sont concourantes en un point P.

4) O étant un point quelconque du plan $\mathcal{E}$, montrer que

$$2\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OM}$$

En déduire que les points M, P, et le centre de gravité G du triangle ABC sont alignés. Préciser la position de G par rapport à M et P.

Exercice IV:

Soit $\mathcal{E}$ un espace affine Euclidien de dimension n. Dans cet exercice, une isométrie désignera une application qui conserve les distances, on ne supposera pas à priori que cette application est affine.

1) Montrer qu'une isométrie de $\mathcal{E}$ possédant $n+1$ points fixes affinement indépendants est l'identité.

2) Montrer qu'une isométrie de $\mathcal{E}$ possédant au moins k points fixes affinement indépendants peut s'écrire comme un produit d'au plus $n+1-k$ réflexions.

Exercice V:

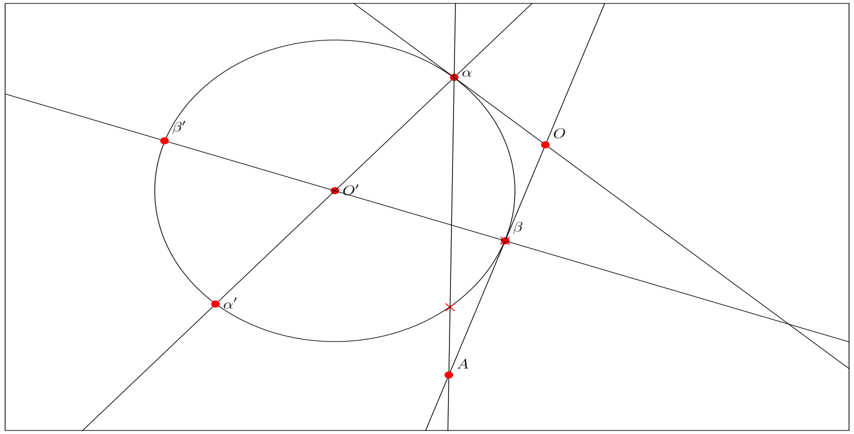
On considère un espace affine Euclidien muni d'un repère orthonormé, ainsi que l'application f dont l'expression dans cette base est:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix} + \frac{1}{3}\begin{pmatrix} -2 & -1 & 2 \\ 2 & -2 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

1) Montrer que f est une isométrie.
2) Déterminer les points fixes de f
3) Décomposer f en produit de réflexions.

Exercice VI:

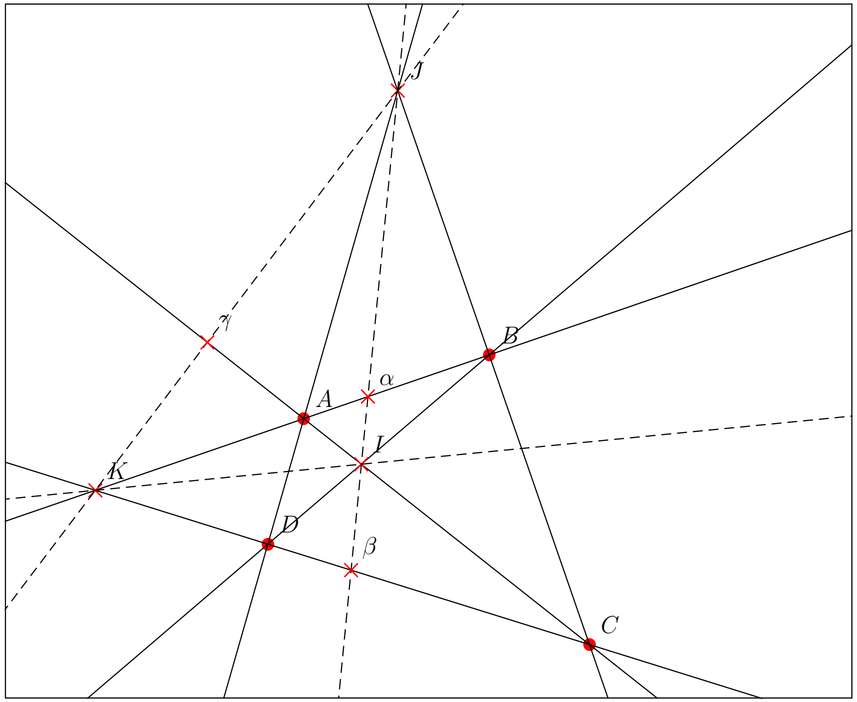
Dans le complété projectif du plan V, on a le dessin suivant. Quel est le dessin correspondant dans V dans le cas où (α, β) est la droite de l'infini.



Exercice VII:

Soit $\mathbb{P}_2$ le complété projectif de $\mathbb{R}^2$, et $A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$. On note Γ l'ensemble des points de $\mathbb{P}_2$ dont les coordonnées vérifient: $\begin{pmatrix} x & y & z \end{pmatrix} .S. \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 0$. Donner une condition sur les coefficients de S pour que Γ soit une parabole.

Exercice VIII:



1) Donner les coordonées projectives des points I, J, K dans le repère projectif (A, B, C, D).
2) Calculer le birapport $(ABK\alpha)$
3) Soit h l'homographie de $\mathbb{P}_2$ définie par: $h(A) = \alpha, h(B) = \beta, h(C) = \gamma, h(D) = K$.
   a) Déterminer les images de J et de γ
   b) Soit M un point de coordonnées projectives (x, y, z) dans le repère projectif (A, B, C, D). Quelles sont les coordonnées projectives de $h(M)$ dans ce repère?

Exercice IX:

$\mathbb{P}$ désignant un plan projectif, soit ABC un triangle et D un point n'appartenant pas aux côtés du triangle. On pose:

$$A' = (BC) \cap (DA), \quad B' = (AC) \cap (DB), \quad C' = (AB) \cap (CD)$$

1) Soit K un point de $\mathbb{P}$, distinct de D et n'appartenant pas aux cotés du triangle. On pose: $P = (BC) \cap (KA), \quad Q = (AC) \cap (KB), \quad R = (AB) \cap (KC)$. Montrer que:

$$(*) \quad (A\ B\ C'\ R)(B\ C\ A'\ P)(C\ A\ B'\ Q) = 1$$

2) On considère dans cette question trois points distincts P, Q, R et distincts de A, B, C, tels que $P \in (BC), \quad Q \in (AC), \quad R \in (AB)$. Montrer que les droites $(AP), (BQ), (CR)$ sont concourantes si et seulement si la relation $(*)$ est vérifiée.

3) Si on prend pour D le centre de gravité de ABC, énoncer le résultat de la question 2) dans le vocabulaire de la géométrie affine.