Université de Paris 7 | **Révisions du 19-03-2008** | **agreg 2008 (F.Han)**

Exercice I:

Soit $\mathcal{E}$ un plan affine, et A, B, C 3 points affinement indépendants.

1) a) Pour $i \in \{1,2,3\}$, M_i est le point de coordonnées barycentriques (x_i, y_i, z_i) dans le repère (A,B,C). Montrer que:

$$M_1, M_2, M_3 \text{ sont alignés} \Leftrightarrow \begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \\ z_1 & z_2 & z_3 \end{vmatrix} = 0$$

b) Donner les équations barycentriques des droites (AB), (AC), (BC)

2) Soient I, J, K les milieux respectifs de [BC], [AC], [AB]. Soit M un point de $\mathcal{E}$ distinct de A,B,C, de coordonnées barycentriques (α, β, γ) dans(A,B,C). On note A' (resp.B',C') le symétrique de M par rapport à I (resp. J, K). Donner les coordonnées barycentriques de A', B', C' en fonction de α, β, γ dans le repère (A,B,C).

3) Montrer que les droites (AA'), (BB'), (CC') sont concourantes en un point P.

4) O étant un point quelconque du plan $\mathcal{E}$, montrer que

$$2\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OM}$$

En déduire que les points M, P, et le centre de gravité G du triangle ABC sont alignés. Préciser la position de G par rapport à M et P.

Exercice II: Formes antisymétriques[1]

Soit k un corps de caractéristique différente de 2. Soit ϕ une forme antisymétrique non dégénérée sur un espace vectoriel E de dimension finie.

1) a) Montrer que si E est de dimension 2, alors il existe une base de E telle que Phi ait pour matrice $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ dans cette base. Dans ce cas on dit que l'espace est un plan symplectique pour Φ.

b) Montrer que E est forcément de dimension paire.

2) Montrer que E est somme orthogonale de m plan symplectiques.

3) On considère l'anneau de polynômes en $n.(n-1)/2$ indéterminées $A = \mathbb{Z}\,[x_{1,2}, \ldots, x_{n-1,n}]$, et M la matrice antisymétrique formelle de taille n en les $x_{i,j}$.

a) Montrer que si n est impair, alors $\det(M) = 0$

b) On suppose que n est pair. Montrer que $\det M$ est le carré d'un élément de $\mathbb{Q}(x_{1,2}, \ldots, x_{n-1,n})$, puis montrer que cet élément est en fait dans $\mathbb{Z}\,[x_{1,2}, \ldots, x_{n-1,n}]$

Exercice III: Codes cycliques

Soit q une puissance d'un nombre premier. Pour $n \in \mathbb{N}, n > 1$, on pose $H = \mathbb{F}_q[X]/(X^n - 1)$.

1) On appellera code cyclique de longueur n un idéal I de H vu comme $\mathbb{F}_q$-espace vectoriel. Montrer que I est principal, et donner une base de I en fonction d'un générateur bien choisi de I.[2]

2) Codes de Reed-Solomon. On suppose $q > 2$, et l'on pose $n = q - 1$. Soit $t \in \mathbb{N}, 1 < t \leq n$. On note $\Sigma = \{1, \ldots, t-1\}$

a) Montrer qu'il existe dans $\mathbb{F}_q$ une racine primitive n-ième de l'unité (On en choisira une notée ζ).

b) On considère le polynôme $g = \prod_{i \in \Sigma} (X - \zeta^i)$. Montrer que g permet de définir un code cyclique de longueur n. Quelle est sa dimension[3]?

c) Montrer qu'un élément non nul m de l'idéal (g) de $\mathbb{F}_q[X]/(X^n - 1)$ exprimé dans la base $1, \ldots, X^{n-1}$ a au moins t coordonnées non nulles. [4] En déduire que la distance minimale entre 2 mots du code est t.

d) Remarquer que si l'on regarde maintenant ces $\mathbb{F}_q$ espaces vectoriels comme des $\mathbb{F}_p$ espaces vectoriels, alors ce code peut corriger $(t-1)/2 * s$ erreurs consécutives, (où $q = p^s$). Par exemple, deux codes racourcis de celui obtenu par la méthode précédente en prenant $q = 2^8$ et $t = 5$ sont utilisés dans les CD.

---

[1] Cf par exemple Goblot, algèbre linéaire

[2] La matrice des vecteurs de base exprimée dans la base (x^i) est appelée matrice génératrice du code.

[3] en tant qu'espace vectoriel

[4] Un élément du code (g) est appelé un mot du code. La distance entre 2 mots est le nombre de coordonnées différentes des 2 vecteurs.