Notations et définitions. On désigne respectivement par $\mathbf{N}$, $\mathbf{Z}$, $\mathbf{Q}$ l'ensemble des entiers naturels, l'anneau des entiers relatifs et le corps des nombres rationnels. On désigne par $\mathcal{F}(\mathbf{Z},\mathbf{Z})$ l'anneau des fonctions de $\mathbf{Z}$ dans $\mathbf{Z}$.

Si k et l sont des entiers positifs ou nuls, avec $k \leq l$, on désigne par $\binom{l}{k}$ le coefficient binômial $\frac{l!}{k!\,(l-k)!}$. Par convention, $0! = 1$.

Première Partie : Fonctions polynômes à valeurs entières.

Définitions : Soit $f \in \mathcal{F}(\mathbf{Z},\mathbf{Z})$ une fonction de $\mathbf{Z}$ dans $\mathbf{Z}$. Sa *différence première* est la fonction notée ∂f définie par $\partial f(n) = f(n) - f(n-1)$.

Pour tout entier $k \geq 1$ on définit par récurrence la *différence k-ième*, notée $\partial^k f$, par $\partial^k f = \partial(\partial^{k-1} f)$. Par convention, $\partial^0 f = f$.

1. Soit $f \in \mathcal{F}(\mathbf{Z},\mathbf{Z})$. Montrer que pour tout entier $p > 0$ et pour tout $n \in \mathbf{Z}$ on a :

$$\partial^p f(n) = \sum_{k=0}^{p} (-1)^k \binom{p}{k} f(n-k).$$

Définitions et notation : Soient $\mathbf{Q}[T]$ l'anneau des polynômes à une indéterminée à coefficients dans $\mathbf{Q}$, et P un élément de $\mathbf{Q}[T]$. Il définit une fonction de $\mathbf{Z}$ dans $\mathbf{Q}$, qui à $n \in \mathbf{Z}$ associe $P(n) \in \mathbf{Q}$. On dit que P est un *polynôme à valeurs entières* si l'image de cette fonction est contenue dans $\mathbf{Z}$. On désigne par $\mathcal{P}$ l'ensemble des polynômes à valeurs entières.

La *différence première* d'un polynôme P de $\mathbf{Q}[T]$ est le polynôme noté ∂P défini par $\partial P(T) = P(T) - P(T-1)$.

2. (a) Montrer que $\mathcal{P}$ est un sous-anneau de $\mathbf{Q}[T]$.

(b) Montrer que l'application qui à $P \in \mathcal{P}$ associe la fonction correspondante est un homomorphisme injectif d'anneaux de $\mathcal{P}$ dans $\mathcal{F}(\mathbf{Z},\mathbf{Z})$.

Dans la suite on identifiera $\mathcal{P}$ à son image, et un élément P de $\mathcal{P}$ à la fonction f_P qu'il définit ; on pourra donc parler du degré d'une telle fonction et on le notera $\deg f_P$.

3. On définit une suite P_k ($k \in \mathbf{N}$) d'éléments de $\mathbf{Q}[T]$ par les formules :

$$P_0 = 1 \quad P_k(T) = \frac{T(T-1)\cdots(T-k+1)}{k!} \quad \text{pour } k > 0.$$

(a) Montrer que pour tout $k \in \mathbf{N}$, P_k appartient à $\mathcal{P}$. On note f_k la fonction correspondante.

(b) Pour $p \geq 0$, calculer $\partial^p f_k$ en fonction de p, de k et des $f_{k'}$ pour $k' \leq k$.

4. (a) Soit $f \in \mathcal{F}(\mathbf{Z},\mathbf{Z})$. Montrer que si f appartient à $\mathcal{P}$ alors ∂f appartient à $\mathcal{P}$, et qu'on a $\deg \partial f = \deg f - 1$ ou $\partial f = 0$.

(b) En déduire que pour tout $f \in \mathcal{P}$, il existe un entier $p \geq 0$ tel que l'on ait pour tout $n \in \mathbf{Z}$:

$$\sum_{k=0}^{p} (-1)^k \binom{p}{k} f(n-k) = 0.$$

(c) Soit $f \in \mathcal{P}$. Montrer que f peut s'écrire de manière unique sous la forme $f = \sum_{k=0}^{\infty} n_k f_k$, où les n_k sont des éléments de $\mathbf{Z}$, tels qu'un nombre fini seulement d'entre eux soient non nuls. On dit que $\mathcal{P}$ est le groupe abélien libre engendré par les f_k.

(d) En déduire qu'une fonction f de $\mathcal{F}(\mathbf{Z},\mathbf{Z})$ appartient à $\mathcal{P}$ si et seulement si ∂f appartient à $\mathcal{P}$, ou encore si et seulement si il existe un entier $p \geq 0$ tel que $\partial^p f = 0$.

Définitions et notation : Soit P un élément de $\mathbf{Q}[T]$. On dit que P est un *polynôme à valeurs entières pour n grand* s'il existe $n_0 \in \mathbf{Z}$ tel que $P(n)$ appartienne à $\mathbf{Z}$ pour $n \geq n_0$. On désigne par $\mathcal{P}'$ l'ensemble des polynômes à valeurs entières pour n grand.

Soit $f \in \mathcal{F}(\mathbf{Z},\mathbf{Z})$. On dit que f est *polynômiale pour n grand* s'il existe $g \in \mathcal{P}$, $n_0 \in \mathbf{Z}$ tels que $f(n) = g(n)$ pour $n \geq n_0$. On désigne par $\mathcal{P}_\infty$ l'ensemble des fonctions polynômiales pour n grand.

5. Montrer que $\mathcal{P}'$ est égal à $\mathcal{P}$.

6. Soit $f \in \mathcal{F}(\mathbf{Z},\mathbf{Z})$.

(a) Montrer que f appartient à $\mathcal{P}_\infty$ si et seulement si ∂f appartient à $\mathcal{P}_\infty$.

(b) Montrer que f appartient à $\mathcal{P}_\infty$ si et seulement si il existe des entiers $p \geq 0$ et n_0 tels que $\partial^p f(n)$ soit nul pour $n \geq n_0$.

7. Soit $f \in \mathcal{F}(\mathbf{Z},\mathbf{Z})$. On lui associe une série formelle Σ_f de $\mathbf{Z}[[t]]$ définie par $\Sigma_f(t) = \sum_{n=0}^{\infty} f(n)t^n$.

Pour tout $k \in \mathbf{N}$, calculer la série Σ_{f_k}.

Deuxième Partie : Dimensions des composantes homogènes d'anneaux de polynômes.

Définitions et notations : Soient k un corps commutatif, r un entier ≥ 1 et $S = k[X_1,\ldots,X_r]$ l'anneau des polynômes à r indéterminées à coefficients dans k.

Un *monôme* de S est un polynôme de la forme $X_1^{\alpha_1}\ldots X_r^{\alpha_r}$ avec $(\alpha_1,\ldots,\alpha_r) \in \mathbf{N}^r$. On notera $\underline{\alpha}$ le multi-indice $\underline{\alpha} = (\alpha_1,\ldots,\alpha_r)$. On remarquera que par définition un monôme n'est jamais nul.

Un *terme* de S est un polynôme égal au produit d'un monôme par un élément non nul de k.

Tout polynôme P de S s'écrit $P = \sum_{\underline{\alpha}\in\mathbf{N}^r} \lambda_{\underline{\alpha}} X_1^{\alpha_1}\ldots X_r^{\alpha_r}$, avec un nombre fini de coefficients $\lambda_{\underline{\alpha}} \in k$ non nuls. Pour $\lambda_{\underline{\alpha}} \neq 0$, $\lambda_{\underline{\alpha}} X_1^{\alpha_1}\ldots X_r^{\alpha_r}$ est alors un terme, on dit que c'est un *terme de P* et que $X_1^{\alpha_1}\ldots X_r^{\alpha_r}$ est le monôme associé à ce terme.

Fixons des entiers $a_1,\ldots,a_r$ strictement positifs. Le *degré pondéré* d'un terme $\lambda X_1^{\alpha_1}\ldots X_r^{\alpha_r}$ ($\lambda \neq 0$) est le nombre $\sum_{i=1}^{r} \alpha_i a_i$; ainsi le monôme (ou, par abus de langage, l'indéterminée) X_i est de degré pondéré a_i. Lorsque les entiers a_i sont tous égaux à 1, on parlera simplement de degré.

Un polynôme est dit *homogène* si tous ses termes ont même degré pondéré ou s'il est nul. Le degré pondéré d'un polynôme homogène non nul est celui de ses termes. Pour $n \geq 0$, on note S_n l'ensemble réunion de 0 et des polynômes homogènes de degré pondéré n. Par convention on posera $S_n = \{0\}$ pour $n < 0$.

Soit $n \in \mathbf{Z}$. La composante homogène de degré pondéré n d'un polynôme est égale à la somme de ses termes de degré pondéré n s'il en a, et à 0 sinon. On pourra noter $\pi_n(P)$ la composante homogène de degré pondéré n d'un polynôme P.

1. Montrer que, pour tout $n \in \mathbf{Z}$, S_n est un k-espace vectoriel de dimension finie. On notera cette dimension $h_S(n)$, ce qui définit une fonction h_S de $\mathcal{F}(\mathbf{Z},\mathbf{Z})$.

2. (a) Calculer $h_S(n)$ pour tout $n \in \mathbf{Z}$ lorsque les entiers a_i sont tous égaux à 1.
(b) Calculer $h_S(n)$ pour tout $n \in \mathbf{Z}$ lorsque $r = 1$.

3. On désigne par S' le sous-anneau de S des polynômes indépendants de X_r, par S'_n ($n \in \mathbf{Z}$) l'intersection de S' avec S_n, et par $h_{S'}(n)$ la dimension de S'_n. Calculer $h_S(n)$ en fonction des nombres $h_{S'}(m)$, pour $m \leq n$.

4. Les notations étant les mêmes que celles de I.7, on considère les deux séries formelles suivantes $\Sigma = \Sigma_{h_S}$ et $\Sigma\,' = \Sigma_{h_{S'}}$.
Calculer le terme général de la série formelle produit $\Sigma\,' \times \sum_{n=0}^{\infty} t^{na_r}$. En déduire qu'on a $\Sigma = \prod_{i=1}^{r}(1 - t^{a_i})^{-1}$.

Dans toute la suite du problème on supposera désormais que les entiers a_i (pour $i = 1, \ldots, r$) sont tous égaux à 1.

Troisième Partie : Idéaux homogènes et relations.

Rappel : Tout idéal de S a un nombre fini de générateurs. On notera $< P_1, \ldots, P_s >$ l'idéal engendré par les polynômes $P_1, \ldots, P_s$.

Définition : Un idéal de S est dit *homogène* s'il admet un système fini de générateurs homogènes.

1. (a) Soient I un idéal homogène de S et P un polynôme de S. Montrer que P appartient à I si et seulement si toutes ses composantes homogènes appartiennent à I.
(b) Soit I un idéal de S. On suppose que dès qu'un polynôme appartient à I, toutes ses composantes homogènes appartiennent à I. Montrer qu'alors I est homogène.
(c) On suppose $r \geq 2$. Montrer que l'idéal engendré par les deux polynômes :

$$X_1 + X_2 \quad \text{et} \quad X_1^2 + X_2(X_1 - 1)$$

est homogène.

Notation : Si I est un idéal de S, $n \in \mathbf{Z}$, on note $I_n = I \cap S_n$ l'ensemble réunion de 0 et des éléments homogènes de degré n de I. Par convention on a donc $I_n = \{0\}$ pour $n < 0$.

2. (a) Soient I un idéal de S et $n \in \mathbf{Z}$. Montrer que I_n est un sous-espace vectoriel de S_n. **Dans toute la suite on notera $h_{S/I}(n)$ la dimension de l'espace vectoriel quotient** S_n/I_n, ce qui définit une fonction $h_{S/I}$ de $\mathcal{F}(\mathbf{Z}, \mathbf{Z})$.
(b) On suppose $r = 1$. Décrire tous les idéaux homogènes de S.
(c) On suppose toujours $r = 1$. Déterminer la fonction $h_{S/I}$ pour tout idéal homogène I de S.

Définitions et notations : Soient N un entier ≥ 1 et N polynômes $F_1, \ldots, F_N$ non nuls de S. Une *relation entre* $F_1, \ldots, F_N$ est un élément $\underline{A} = (A_1, \ldots, A_N)$ de S^N tel que $\sum_{i=1}^{N} A_i F_i = 0$. S'il n'y a pas de confusion possible, on dira seulement *relation.* Pour tout entier $i \in [1, N]$ on dit que A_i est la i-ième composante de $\underline{A}$.
Soient $\underline{A} = (A_1, \ldots, A_N)$ et $\underline{B} = (B_1, \ldots, B_N)$ deux relations, P un polynôme. La *somme des deux relations $\underline{A}$ et $\underline{B}$* est la relation $\underline{A} + \underline{B} = (A_1 + B_1, \ldots, A_N + B_N)$. Le *produit de la relation $\underline{A}$ par le polynôme P* est la relation $P\underline{A} = (PA_1, \ldots, PA_N)$. On désigne par $\mathcal{R}_F$ l'ensemble (on dira aussi le *module*) des relations entre $F_1, \ldots, F_N$.

Si $F_1, \dots, F_N$ sont homogènes de degrés quelconques, une relation $\underline{A} = (A_1, \dots, A_N)$ est dite *homogène* si ses composantes le sont et si les polynômes A_iF_i non nuls sont tous de même degré.

Soit P un polynôme. On note $P\mathcal{R}_F$ l'ensemble des relations $P\underline{A}$, avec $\underline{A}$ appartenant à $\mathcal{R}_F$.

Soient M un entier ≥ 1 et M relations $\underline{A}_1, \dots, \underline{A}_M$. Le *sous-module* de relations engendré par $\underline{A}_1, \dots, \underline{A}_M$ est l'ensemble des relations $\underline{A}$ qui peuvent s'écrire $\underline{A} = \sum_{j=1}^{M} P_j\underline{A}_j$, où $P_1, \cdots, P_M$ sont des polynômes. Si cet ensemble est égal à $\mathcal{R}_F$, on dit que $\underline{A}_1, \dots, \underline{A}_M$ *engendrent* $\mathcal{R}_F$ ou *sont des générateurs de* $\mathcal{R}_F$. On dira aussi que $\mathcal{R}_F$ est engendré par un nombre fini de relations.

3. Soient M un entier ≥ 1, $\underline{A}$, $\underline{B}$, $\underline{A}_1, \dots, \underline{A}_M$ des relations et P un polynôme. Montrer que si $\underline{A}$ et $\underline{B}$ appartiennent au sous-module de relations engendré par $\underline{A}_1, \dots, \underline{A}_M$, il en est de même de $\underline{A} + \underline{B}$ et de $P\underline{A}$.

4. Montrer que si $F_1, \dots, F_N$ sont homogènes, toute relation est somme de relations homogènes.

5. (a) On considère l'application $p_1 : \mathcal{R}_F \to S$ qui associe à une relation $\underline{A}$ sa première composante. Montrer que l'image de p_1 est un idéal de S, qui est homogène si $F_1, \dots, F_N$ le sont.

(b) Montrer qu'il existe un entier $M \geq 1$ et M relations $\underline{A}_1, \dots, \underline{A}_M$ tels que si on désigne par $\mathcal{R}_1$ le sous-module de relations qu'elles engendrent, toute relation de $\mathcal{R}_F$ soit somme d'un élément de $\mathcal{R}_1$ et d'un élément dont l'image par p_1 est nulle.

(c) En déduire, par récurrence sur N, que $\mathcal{R}_F$ peut être engendré par un nombre fini de relations.

(d) Montrer que si $F_1, \dots, F_N$ sont homogènes, $\mathcal{R}_F$ peut être engendré par un nombre fini de relations homogènes.

Quatrième Partie : Étude des relations dans le cas $r = 2$.

Notations : Dans toute cette partie on suppose qu'on a $r = 2$ et on note $X = X_1$ et $Y = X_2$ les deux indéterminées de sorte qu'on a $S = k[X, Y]$. On fixe un entier $N > 1$, N polynômes homogènes $F_1, \dots, F_N$ non nuls de degrés respectifs $d_1, \dots, d_N$, et on note I l'idéal qu'ils engendrent.

Soit $K = k(X, Y)$ le corps des fractions rationnelles en X, Y. On munit le K-espace vectoriel K^N de sa base canonique $(e_1, \dots, e_N)$. En considérant tout polynôme comme une fraction rationnelle de dénominateur égal à 1, on plonge S dans K et S^N dans K^N. Donc une relation $\underline{A} = (A_1, \dots, A_N)$ entre $F_1, \dots, F_N$ peut être considérée comme un élément de K^N.

1. On définit une forme linéaire φ sur K^N par $\varphi(e_i) = F_i$ pour $i = 1, \dots, N$.

(a) Montrer que $\mathcal{R}_F$ est l'intersection du noyau de φ et de S^N.

(b) Soit M un entier ≥ 1. Montrer que si $\underline{A}_1, \dots, \underline{A}_M$ engendrent $\mathcal{R}_F$, ils forment un système de générateurs du noyau de φ.

En déduire qu'on a $M \geq N - 1$.

Dans la suite on fixe $\underline{A}_1, \dots, \underline{A}_M$ des générateurs homogènes de $\mathcal{R}_F$ (qui existent d'après III.5.(d)) et on note A_{ij} la i-ième composante de $\underline{A}_j$.

2. (a) Montrer qu'il existe des entiers $\delta_1, \cdots, \delta_M$ tels qu'on ait, pour tout couple d'entiers $(i,j) \in [1,N] \times [1,M]$, $\deg A_{ij} = \delta_j - d_i$.

(b) Montrer que pour toute relation homogène $\underline{A}$ il existe des polynômes homogènes $P_1, \cdots, P_M$ tels qu'on ait $\underline{A} = \sum_{j=1}^{M} P_j \underline{A}_j$.

3. On suppose qu'on a $M \geq 2$.

(a) Montrer qu'il existe un entier $j_0 \in [1,M]$ et un élément $(\lambda_j)_{j\in[1,M], j\neq j_0}$ de k^{M-1} tels que, si on pose

$$\underline{A}'_j = \underline{A}_j + \lambda_j Y^{\delta_j - \delta_{j_0}} \underline{A}_{j_0} \quad \text{pour } j \neq j_0$$

$$\underline{A}'_{j_0} = \underline{A}_{j_0}$$

alors pour tout $j \neq j_0$, la première composante A'_{1j} de $\underline{A}'_j$ est un multiple de X, et $\underline{A}'_1, \ldots, \underline{A}'_M$ sont des générateurs homogènes de $\mathcal{R}_F$.

(b) En déduire que $\mathcal{R}_F$ peut être engendré par des relations homogènes $\underline{B}_1, \ldots, \underline{B}_M$ telles que la i-ème composante B_{ij} de $\underline{B}_j$ soit divisible par X pour $j > i$.

(c) Montrer qu'en particulier, si $M \geq N$, pour tout entier $j \in [N, M]$, $\underline{B}_j$ appartient à $X\mathcal{R}_F$.

4. On suppose qu'on a $M \geq N$ et on désigne par $\mathcal{R}'$ le sous-module engendré par $\underline{B}_1, \ldots, \underline{B}_{N-1}$, où $\underline{B}_1, \ldots, \underline{B}_M$ sont des relations homogènes vérifiant la condition de 3.(b) ci-dessus.

(a) Soit $\underline{A} \in \mathcal{R}_F$. Montrer que pour tout $n \geq 1$, $\underline{A}$ est somme d'un élément de $\mathcal{R}'$ et d'un élément de $X^n \mathcal{R}_F$.

(b) En déduire que $\mathcal{R}_F$ peut être engendré par $N-1$ relations homogènes.

5. Soient $N-1$ relations homogènes $\underline{C}_1, \ldots, \underline{C}_{N-1}$ qui engendrent $\mathcal{R}_F$. D'après 2.(a), il existe des entiers $\varepsilon_1, \cdots, \varepsilon_{N-1}$ tels qu'on ait, pour tout couple d'entiers $(i,j) \in [1,N] \times [1, N-1]$, $\deg C_{ij} = \varepsilon_j - d_i$.

(a) Montrer que pour tout n, I_n est isomorphe, en tant que k-espace vectoriel, au quotient de $\oplus_{i=1}^{N} S_{n-d_i}$ par un sous-espace vectoriel isomorphe à $\oplus_{j=1}^{N-1} S_{n-\varepsilon_j}$.

(b) En déduire la valeur de la dimension (notée $h_{S/I}(n)$, voir III.2.) du k-espace vectoriel quotient S_n/I_n.

(c) Montrer que la fonction $h_{S/I}$ ainsi définie appartient à $\mathcal{P}_\infty$.

Cinquième Partie : Idéaux monômiaux.

Notation et définition : Dans la suite, S désigne de nouveau l'algèbre des polynômes $k[X_1, \ldots, X_r]$ à r indéterminées et r est un entier quelconque ≥ 1. Un idéal I de S est dit *monômial* s'il admet un système de générateurs formé de monômes.

1. Soient s un entier ≥ 1, $I = < m_1, \ldots, m_s >$ un idéal monômial engendré par des monômes $m_1, \ldots, m_s$, et m un monôme.

(a) Montrer que m appartient à I si et seulement si m est divisible par l'un des monômes $m_1, \ldots, m_s$.

(b) Soit P un polynôme non nul. Montrer que P appartient à I si et seulement si chacun de ses termes appartient à I.

(c) On pose $J = (I : m) = \{P \in S \mid Pm \in I\}$. Montrer que J est un idéal monômial.

2. Soient s et t deux entiers ≥ 1, $I = < m_1, \ldots, m_s >$ et $I' = < m'_1, \ldots, m'_t >$ deux idéaux monômiaux. Montrer que $I \cap I'$ est un idéal monômial.

3. Soient s un entier compris entre 1 et r et I l'idéal $< X_1, \ldots, X_s >$. Montrer que la fonction $h_{S/I}$ (voir III.2.) appartient à $\mathcal{P}_\infty$.

4. Soient s un entier ≥ 1, $I =< m_1, \ldots, m_s >$ un idéal monômial et m un diviseur de m_1 de degré d. On pose $J = (I : m)$ et $I' = I+ < m >$.

(a) Montrer pour tout n l'égalité :

$$h_{S/I}(n) = h_{S/J}(n-d) + h_{S/I'}(n)$$

.

(b) En déduire que la fonction $h_{S/I}$ appartient à $\mathcal{P}_\infty$.

5. Soient s un entier compris entre 1 et r et I l'idéal engendré par les monômes X_iX_j, $i \in [1, s]$, $j \in [s+1, r]$.

(a) Calculer la fonction $h_{S/I}$.

(b) Soient p et $k_1, \ldots, k_p$ des entiers ≥ 1. Construire un anneau de polynômes S', un idéal monômial I' de S' tels que l'on ait, pour tout $n \geq 1$:

$$h_{S'/I'}(n) = f_{k_1}(n + k_1) + \cdots + f_{k_p}(n + k_p).$$

Définition : Soient $m = X_1^{\alpha_1} \ldots X_r^{\alpha_r}$ et $m' = X_1^{\alpha'_1} \ldots X_r^{\alpha'_r}$ deux monômes. On dit que *m est supérieur ou égal à m'*, et on note $m \geq m'$ si $m = m'$ ou si on a :

$\deg m > \deg m'$ ou

$\deg m = \deg m'$ et $(\alpha_1 \ldots \alpha_r) \geq (\alpha'_1 \ldots \alpha'_r)$ pour l'ordre lexicographique, c'est-à-dire que si i_0 est le plus petit indice i pour lequel $\alpha_i \neq \alpha'_i$, alors $\alpha_{i_0} > \alpha'_{i_0}$.

On dit que *m est strictement supérieur à m'*, et on note $m > m'$, si on a $m \geq m'$ et $m \neq m'$.

6. (a) Montrer qu'on définit ainsi une relation d'ordre total sur les monômes.

(b) Montrer que si m, m', m'' sont trois monômes tels que $m > m'$ et $m'' \neq 1$, alors on a $mm'' > m'm'' > m'$.

(c) Montrer que tout sous-ensemble non vide de l'ensemble des monômes a un plus petit élément.

(d) Montrer que pour tout monôme m, il n'existe qu'un nombre fini de monômes m' avec $m > m'$.

Définitions : Soit P un polynôme non nul. A chacun de ses termes est associé un monôme. On appelle *terme initial de P*, et on note in$P$, le terme de P correspondant au plus grand de ces monômes.

Soit I un idéal de S non nul. On appelle *idéal initial de I*, et on note in$I$, l'idéal monômial engendré par les termes initiaux des éléments non nuls de I.

8. Soient I un idéal non nul, $J =$ in$I$ son idéal initial, $\mathcal{M}$ l'ensemble des monômes qui n'appartiennent pas à J, et $\mathcal{M}'$ l'ensemble des images dans le quotient S/I des éléments de $\mathcal{M}$.

(a) Montrer que tout monôme de J est le terme initial d'un polynôme de I.

(b) Soit P un polynôme non nul tel que $P \neq$ in$P$. Montrer que in$(P -$ in$P) <$ in$P$.

(c) Montrer que $\mathcal{M}'$ est un système libre du k-espace vectoriel S/I.

(d) En déduire que $\mathcal{M}'$ est une base de S/I.

(e) Montrer que pour tout idéal homogène I de S, la fonction $h_{S/I}$ appartient à $\mathcal{P}_\infty$.