Université de Paris 7 **agreg 07-08**
(F.Han[1])

Exercices sur les déterminants

Exercice I: Utilisation des formules de Cramer

Dans un anneau commutatif unitaire, on considère le système de n équations en $p_0, \ldots, p_{n-1}$ où $e_0 = 1$ (relations de Newton[2]):

$$1 \leq r \leq n, r.e_r = \sum_{k=1}^{r} (-1)^{k-1} e_{r-k}.p_k$$

1) Montrer que $p_r = \begin{vmatrix} e_1 & e_0 & 0 & \ldots & 0 \\ 2e_2 & e_1 & e_0 & 0 & \vdots \\ \vdots & e_2 & e_1 & \ddots & 0 \\ (r-1).e_{r-1} & \vdots & . & \ddots & e_0 \\ re_r & e_{r-1} & e_{r-2} & \ldots & e_1 \end{vmatrix}$ pour r appartenant à $\{1, \ldots, n\}$

2) Remarque: Par exemple, dans l'anneau des polynômes symétriques en $(x_1, \ldots, x_n)$, si e_i est la ième fonction symétrique élémentaire et $p_i = \sum_{k=1}^{n} x_k^i$ la ième somme de Newton, alors ils vérifient les relations de Newton.

3) Peut on obtenir (e_i) en fonction de (p_i) en caractéristique finie inférieure à n?

Exercice II: Coordonnées barycentriques, aire

Soient $\mathcal{E}$ un plan affine, et $(\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$ une base de son espace vectoriel E. Pour 2 éléments v_1, v_2 de E, on notera dans cet exercice $\det_{(\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})}(v_1, v_2)$ le déterminant de l'application linéaire $E \to E$, $\overrightarrow{i} \mapsto v_1$, $\overrightarrow{j} \mapsto v_2$.

a) Montrer [3]que si A, B, C, M sont des point de $\mathcal{E}$, on a:

$$\det_{(\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})}(\overrightarrow{MB}, \overrightarrow{MC}).\overrightarrow{MA} + \det_{(\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})}(\overrightarrow{MC}, \overrightarrow{MA}).\overrightarrow{MB} + \det_{(\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})}(\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB}).\overrightarrow{MC} = \overrightarrow{0}$$

b) On suppose maintenant que $\mathcal{E}$ est aussi muni d'une structure Euclidienne. En déduire que les coordonées barycentriques du centre O du cercle inscrit au triangle A, B, C sont (à facteur près):

$$(A, BC), (B, CA), (C, AB)$$

Exercice III: Développement ligne/colonne; matrice adjointe

Soit A une matrice carrée de taille n à coefficients dans un anneau commutatif unitaire, et I la matrice identité de taille n. On note $P_A(X) = \det(X.I - A)$ le polynôme caractéristique de A. Montrer que la dérivée de $P_A(X)$ par rapport à X est la trace de la matrice adjointe (parfois appelée comatrice) de $(X.I - A)$.

NB ce résultat peut être utilisé pour calculer P_A. (Cf. calcul du polynôme caractéristique, et aussi preuve du théorème de Cayley-Hamilton. Gantmacher chap4(tome1); H.Cohen p49 "A course in computationnal number theory", ou la doc de xcas: algorithmes, calcul du polynôme caractéristique, méthode de Fadeev...)

Exercice IV: Exemple de problème d'alignement en géométrie affine plane.

Soit $\mathcal{E}$ un plan affine, et A, B, C 3 points affinement indépendants.

[1]http://www.math.jussieu.fr/~han/agreg

[2]Pour une référence, chercher relations de Newton, polynomes symétriques

[3]On pourra créer une matrice 3x3 de dernière ligne nulle dont les colonnes représentent $\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB}, \overrightarrow{MC}$

1) a) Pour $i \in \{1,2,3\}, M_i$ est le point de coordonnées barycentriques (x_i, y_i, z_i) dans le repère (A,B,C). Montrer[4] que:

$$M_1, M_2, M_3 \text{ sont alignés} \Leftrightarrow \begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \\ z_1 & z_2 & z_3 \end{vmatrix} = 0$$

b) Donner les équations barycentriques des droites (AB), (AC), (BC)

2) Soient I, J, K les milieux respectifs de $[BC]$, $[AC]$, $[AB]$. Soit M un point de $\mathcal{E}$ distinct de A,B,C, de coordonnées barycentriques (α, β, γ) dans (A, B, C). On note A' (resp.B',C') le symétrique de M par rapport à I (resp. J, K). Donner les coordonnées barycentriques de A', B', C' en fonction de α, β, γ dans le repère (A, B, C).

3) Montrer que les droites (AA'), (BB'), (CC') sont concourantes en un point P.

4) O étant un point quelconque du plan $\mathcal{E}$, montrer que

$$2\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OM}$$

En déduire que les points M, P, et le centre de gravité G du triangle ABC sont alignés. Préciser la position de G par rapport à M et P.

Exercice V: Théorème de Ménelaüs.[5]

Soient $\mathcal{E}$ un k-espace affine de dimension n, $(a_0, \dots, a_n)$ un repère affine de $\mathcal{E}$. Pour $u, v \in \mathcal{E}$ on note $V(u, v)$ l'espace affine engendré par u et v. Soit $b_0, \dots, b_n$ des points de $\mathcal{E}$ tels que:

$$\forall 0 \leq i < n, b_i \in V(a_i, a_{i+1}) - \{a_i, a_{i+1}\}, \text{ et } b_n \in V(a_n, a_0) - \{a_n, a_0\}$$

Alors $(b_0, \dots, b_n)$ est affinement liée si et seulement si

$$\frac{a_0 - b_0}{a_1 - b_0} . \frac{a_1 - b_1}{a_2 - b_1} \cdots \frac{a_{n-1} - b_{n-1}}{a_n - b_{n-1}} . \frac{a_n - b_n}{a_0 - b_n} = 1$$

où l'on définit pour 3 points u, v, w alignés de $\mathcal{E}$ tels que $v \neq w$ le rapport $\dfrac{u - v}{w - v}$ comme étant l'unique élément λ de k tel que les vecteurs $u - v$ et $\lambda.(w - v)$ soient égaux.

Exercice VI: Résultant et réciprocité quadratique.[6]

1) Montrer que $Res(AB, Q) = Res(A, Q)Res(B, Q)$ et $Res(P, Q) = (-1)^{\deg(P)\deg(Q)}Res(Q, P)$

2) a) Montrer que pour n impair, il existe $Q_n \in \mathbb{Z}[X]$ de degré $d = \dfrac{n-1}{2}$ tel que: $Q_n(x + x^{-1}) = \sum_{k=-d}^{d} x^k$, et donc que $Res(Q_m, Q_n) \in \mathbb{Z}$. (NB Quelles sont les racines de Q_n?)

b) Soit p un nombre premier, montrer que si p divise $Res(Q_m, Q_n)$, alors $m \wedge n \neq 1$. (On pourra supposer qu'il existe une racine commune $\beta \in \Omega$ de Q_m et Q_n, et trouver une solution de $z + 1/z = \beta$ pour montrer que $X^m - 1 \wedge X^n - 1 \neq 1$. où Ω est une clôture algébrique de $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$). En déduire[7]que:

$$m \wedge n = 1 \Rightarrow Res(Q_m, Q_n) = \pm 1$$

3) a) Soit p un nombre premier impair. Montrer que $Q_p(x) \equiv (x - 2)^{\frac{p-1}{2}}$ $[p]$

b) Montrer que dans $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ on a: $Res(Q_p, Q_n) = (Res(x - 2, Q_n))^{\frac{p-1}{2}} = (Q_n(2))^{\frac{p-1}{2}} = n^{\frac{p-1}{2}}$

c) En déduire la loi de réciprocité quadratique lorsque p et q sont des nombres premiers distincts impairs.

[4]Pour une généralisation: Cf par ex J.Fresnel, Méthodes modernes en géométrie. 2.2.4, 2.2.6

[5]Cf J.Fresnel, Méthodes modernes en géométrie. Th4.2.3

[6]Cf Merindol: "Nombres et Algèbre", ou RMS 107.

[7]Exo indép: $X^m - 1 \wedge X^n - 1 = X^{m \wedge n} - 1$ (comparer l'algorithme d'Euclide de $X^m - 1$, $X^n - 1$ avec celui de m et n)