Université de Paris 7 **agreg 2008**
(F.Han[1])

Exercices sur les formes quadratiques

Exercice I:

On considère la forme quadratique q définie sur $\mathbb{R}^3$ de matrice: $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 \\ -1 & 0 & -1 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$.

1) Quelle est la signature de q.

2) But: Quels sont les plans vectoriels H tels que la restriction de q à H soit definie positive?

a) Pour un plan vectoriel H de $\mathbb{R}^3$ quelconque, faire une table des possibilités des signatures des restrictions de q à H et $H^\perp$ et de $H + H^\perp$

b) Exprimer dans la base duale les coordonnées de $(x_0, x_1, x_2)^\perp$

c) Quels sont les plans d'équation $H : a_0.x_0 + a_1.x_1 + a_2.x_2 = 0$ tels que $q_{|H}$ soit définie positive.

Exercice II:

On considère un espace euclidien $E, (|)$, et u un endomorphisme de E. On note q la forme quadratique définie par $q(x) := (u(x)|x)$. Alors montrer par récurrence qu'il existe une BON de vecteurs q isotropes si et seulement si trace(u)=0

Exercice III: Méthode d'Hermite

(Cf Dieudonné Calcul infinitésimal p 64) Soit $f \in \mathbb{R}[X]$ et $t \in \mathbb{R}$. On définit le polynôme f^* par $f^*(x) = (x - t).f'(x)$. On note n le degré de f et f^*. On considère l'élément

$$L(f, x, y) = \frac{f(x)f^*(y) - f(y)f^*(x)}{x - y} = \sum_{h=0}^{n-1} \sum_{k=0}^{n-1} A_{h,k} x^h.y^k$$

. où l'on a: $A_{h,k} = A_{k,h}$. On considère alors la forme quadratique

$$Q(f, u_0, \ldots, u_{n-1}) = \sum_{h=0}^{n-1} \sum_{k=0}^{n-1} A_{h,k} u_h.u_k$$

Proposition: *Si $f \in \mathbb{R}[x]$ est sans racines multiples, et si t n'est pas racine de f, alors $Q(f)$ est de rang n et de signature $(p + r, q + r)$ où p est le nombre de racines réelles supérieures à t, q le nombre de racines réelles inférieures à t, et $2r$ le nombre de racines non réelles.*

[1]http://www.math.jussieu.fr/~han/agreg