Université de Paris 7 **agreg 2007**
(F.Han)

Exercices sur les nombres complexes de module 1

Exercice I:

1) But: Montrer qu'un sous groupe G de $(\mathbb{R}, +)$ est monogène ou dense.

a) Soit $a = \inf\{G \cap \mathbb{R}^{+*}\}$. Montrer que si $a = 0$, alors G est dense dans $\mathbb{R}$.

b) Montrer que si $a > 0$ alors $a \in G$. Indication: Cf[1]

c) Montrer que $G = a\mathbb{Z}$. Indication[2]

2) Montrer que les sous groupes de $\mathbb{U}$ sont finis ou denses. (où $\mathbb{U}$ est le groupe des nombres complexes de module 1)

Exercice II:

Tout sous groupe fini du groupe multiplicatif d'un corps commutatif est cyclique.

Exercice III:

1) Montrer (notamment sans utiliser l'exponentielle) que l'on peut résoudre une équation de degré 2 de manière purement algébrique. [3]

2) Montrer de manière purement algébrique que pour $|z| = 1$, qu'une suite telle que $u_0 = z$ et $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1}^2 = u_n$ converge vers 1. (Cf Ebbinghaus and all: "Numbers"; (chapitre: what is π?)))

3) En déduire que si l'image de l'application $\mathbb{R} \to \mathbb{U}, x \mapsto e^{i.x}$ contient un voisinage de 1, alors elle est surjective.

4) Pourquoi la fonction sin est elle positive sur $]0, \pi[$?

COMPLÉMENTS: (PAR EXEMPLE À TRAVAILLER AVEC UN LIVRE)

Exercice IV:

(Cf. Demazure, "cours d'algèbre". Transformée de Fourier discrète/rapide) On note $(A, +, .)$ l'anneau des fonctions de $0, \ldots, n-1$ dans $\mathbb{C}$.

1) On pose pour $a, b \in A : a * b = \sum_{i=0}^{n-1} a(i)b(n-i)$. Montrer que ce produit de convolution correspond à la multiplication des polynômes $\sum_{i=0}^{n-1}(a_i.X^i)$ et $\sum_{i=0}^{n-1}(b_i.X^i)$ dans $\mathbb{C}[X]/(X^n - 1)$

2) Pour $a \in A$, on définit l'élément $\mathcal{F}(a)$ (resp $\bar{\mathcal{F}}(a)$) de A par: $\forall j \in \{0, \ldots, n-1\} \mathcal{F}(a)(j) = \sum_{k=0}^{n-1} e^{2.i.j.k\pi/n} a(k)$. (resp $\bar{\mathcal{F}}(a)(j) = \sum_{k=0}^{n-1} e^{-2.i.j.k\pi/n} a(k)$)

a) Calculer $\bar{\mathcal{F}} \circ \mathcal{F}(a)$

b) Montrer que $\mathcal{F}(a * b) = \mathcal{F}(a).\mathcal{F}(b)$

Exercice V: Un groupe fini abelien est produit de groupes cycliques (via les caractères)

Soit G un groupe abélien fini.

1) a) Soit x un élément d'ordre n de G. Montrer que pour tout diviseur d de n, G possède un élément d'ordre d

b) Soient x et x' des éléments de G d'ordre respectifs n et n'. Montrer que G a un élément d'ordre le ppcm de n et n'. (On pourra décomposer n et n' en facteurs premiers, et montrer que G possède des éléments d'ordre $p_i^{max(d_i, d'_i)}$)

2) H un sous groupe de G. Tout caractère de H se prolonge en un caractère de G. (Cf Serre: Cours d'arithmétique. Chap 6 prop 1)

3) Soit a un élément d'ordre maximal m de G, H le groupe engendré par a. χ un isomorphime entre H et U_m, et χ_G un caractère de G prolongeant χ. On note p la projection canonique de G sur G/H.

---

[1] sinon on peut construire un élément de G dans $]0, a[$

[2] Par division euclidienne

[3] retenir l'astuce pour la racine carrée

a) Montrer que $\forall x \in G, \chi_G(x) \in \mathbb{U}_m$

b) Montrer que $G \to H \times G/H$, $x \mapsto (\chi^{-1}(\chi_G(x)), p(x))$ est un isomorphisme.

4) Conclure par récurence.

5) a) Montrer que si G est cyclique, alors $\hat{G} \simeq G$

b) En déduire que si G est abélien fini, alors on a encore $\hat{G} \simeq G$.

Exercice VI:

On se limite aux caratères des groupes abéliens finis: (i.e morphismes de G dans $(\mathbb{C}^*, .)$)

1) Montrer les formules d'orthogonalité des caractères. (Cf Serre cours d'arithmétique. Chap6 prop 4)

2) Application: Cf Serre, cours d'arithmétique, (p123 4.3 lemme 9). Soit a et m deux entiers tels que $a \wedge m = 1$. On note $\mathcal{P}$ (resp $\mathcal{P}_a$) l'ensemble des nombres premiers (resp premiers congrus à a modulo m). On note G le groupe multiplicatif de $\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$. But: Montrer que $\left(\sum_{p \in \mathcal{P}} \frac{1}{p^s} \underset{\substack{s \to 1 \\ Re(s) > 1}}{\sim} \log \frac{1}{s-1} \right)$ implique le théorème de la progression arithmétique de Dirichlet. On suppose donc dans la suite: $\sum_{p \in \mathcal{P}} \frac{1}{p^s} \sim \log \frac{1}{s-1}$.

a) On pose $f_\chi(s) = \sum_{p \in \mathcal{P}, p \wedge m = 1} \frac{\chi(p)}{p^s}$. Montrer que $f_1(s) \sim \log \frac{1}{s-1}$ lorsque s tend vers 1.

b) pour $\chi \neq 1$ $f_\chi(s)$ reste borné lorsque s tend vers 1.

c) Montrer que $\sum_{p \in \mathcal{P}_a} \frac{1}{p^s} = \frac{1}{\phi(m)} \sum_{\chi \in \hat{G}} \chi(a)^{-1} f_\chi(s)$