Exercice I:

1) Comment trouver le vecteur des coefficients d'un polynôme ?

2) Si $M \in \mathcal{M}_{i,l}$ et $N \in \mathcal{M}_{i,k}$ sont des matrices. Comment créer l'élément de $\mathcal{M}_{i,l+k}$ correspondant à la juxtaposition de M et N ? Comment ferait on pour une juxtaposition verticale ?

3) Étudier les fonctions graphiques de votre logiciel. Pour les options de couleurs et les noms on pourra obtenir des syntaxes en cliquant, puis ajuster les objets voulus en ligne de commande. Pour obtenir une description complète on regardera la documentation dans l'aide html "les fonctions de la géométrie en 2D"

a) Déssiner la droite passant par les points $(0,0)$, et $(3,4)$ en tirets rouges, et celle passant par $(0,0)$ $(1,-1)$ en bleu sur le même graphique.

b) Déssiner 2 translatés des droites précédentes par addition et les 4 intersections.

c) Dessiner une liste de deux points. Par exemple $(1,1)$ et $(2,3)$. En rouge avec nom caché et grosse croix.

Exercice II:

1) On considère les sous groupes N_1, N_2, N_3 de $M = (\mathbb{Z}^4, +)$ engendré par les vecteurs $\begin{pmatrix} 8 & 4 & 60 & 0 \\ 8 & 12 & 18 & 36 \\ 16 & 16 & 32 & 32 \\ 32 & 32 & 32 & 32 \end{pmatrix}$, et $\begin{pmatrix} 8 & 4 & 60 & 0 \\ 8 & 12 & 18 & 36 \\ 16 & 16 & 32 & 32 \\ 24 & 28 & 40 & 68 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 8 & 4 & 60 & 0 & 16 \\ 8 & 12 & 18 & 36 & 28 \\ 16 & 16 & 32 & 32 & 32 \\ 24 & 28 & 40 & 68 & 68 \end{pmatrix}$. Décomposer M/N_i en produit de groupe cycliques. Quel est le cardinal de M/N_i ?

2) On considère le réseau engendré par les vecteurs $v_1 = (1,2)$, $v_2 = (-1,1)$, $v_3 = (0,2)$.

a) Dessiner naïvement en bleu les points de ce réseau de coordonnées dans $[-5,5]$

b) Rajouter en rouge ceux du réseau engendré par v_1, v_2. idem avec v_1, v_3 et v_2, v_3. Peut ont forcément extraire une base d'une famille génératrice ?

Exercice III: Anneaux d'entiers

1) a) On considère maintenant l'anneau $R = \mathbb{Z}[i.\sqrt{5}]$. et I l'idéal engendré par 2 et $3 + 3i\sqrt{5}$. Donner une famille génératrice de I en tant que groupe abélien. Quel est le cardinal de R/I (On appellera ce nombre la norme de l'idéal I).

b) soit $z \in R$. Quelle est la matrice de la multiplication par z de R dans R ? Quel est son déterminant et le cardinal de $R/(z)$ (ie la norme de z). L'idéal I est il principal ?

c) Dessiner sur un même graphique le réseau associé à I et celui de $\mathbb{Z}[i\sqrt{5}]$.

d) Completer :
Une similitude conserve les $\boxed{}$. Déduire du dessin[2] que I n'est pas principal.

2) On prend maintenant $R = \mathbb{Z}[i.\sqrt[4]{5}]$ et $I = (2, 1+\sqrt{5})$. Calculer la norme de I et celle d'un élément z (On remarquera que c'est encore le déterminant de la multiplication par z). L'idéal I est il principal ?

Exercice IV: base adaptée

Lorsque M est un $\mathbb{Z}$-module de type fini et N un sous module de M, on dit que $e_1, \ldots, e_n$ est une base adaptée de M pour N si l'ensemble $\{m_1e_1, \ldots, m_ne_n\}$ privé de 0 est une base de N où les (m_i) sont les diviseurs élémentaires de N éventuellement complétes par des zéros. Remarquer que si N est engendré par l'image de A, pour trouver une base adaptée il faut avoir conservé les opérations sur les lignes. En utilisant une fonction intégré dans le logiciel, trouver une base adaptée aux modules de l'exercice II.

Exercice V: $k[x]$-modules de type fini

1) On considère la matrice sous forme de Jordan $M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. Répondre de tête aux questions suivantes : Quel est son polynôme minimal, le polynôme caractéristique ? Les diviseurs élémentaires ?

2) En déduire la forme de smith de $M - x.Id$, et vérifier votre réponse avec le logiciel. (On pourra chercher l'instruction pari pour la forme de smith d'une matrice a coefficients polynomiaux.)

[1] http ://www.math.jussieu.fr/∼han/agreg

[2] On prendra garde au fait qu'il n'y a pas unicité de la base