1 restart;maple_mode(1);cas_setup(0,0,0,1,0,1e-10,10,[1,50,0,25],0,0,0);#radians,pas de cmplx, pas de Sqrt

([E1   E2   l1   l2],   Warning: some commands like subs might change arguments order,   0,   0,   0,   1,   0

Menu

2 a:='a';symb2poly((2+4*a)^3,a);

(a not assigned , [64   96   48   8])

Menu

3 M:=matrix(2,3,1);N:=matrix(2,4,2);OO:=matrix(3,3,3);augment(M,N);concat(M,OO);

$$\left(\begin{bmatrix}1&1&1\\1&1&1\end{bmatrix},\begin{bmatrix}2&2&2&2\\2&2&2&2\end{bmatrix},\begin{bmatrix}3&3&3\\3&3&3\\3&3&3\end{bmatrix},\begin{bmatrix}1&1&1&2&2&2&2\\1&1&1&2&2&2&2\end{bmatrix},\begin{bmatrix}1&1&1\\1&1&1\\3&3&3\\3&3&3\\3&3&3\end{bmatrix}\right)$$

Menu

4

5 Fig Edit Graph Pointer Mode Save

1 l1:= droite(0,3+4*(I),'couleur'=(rouge+point_width_5+dot_

droite(y=(4/3*x))

2 l2 := droite(0,1-I,'couleur'=bleu);

droite(y=(-x))

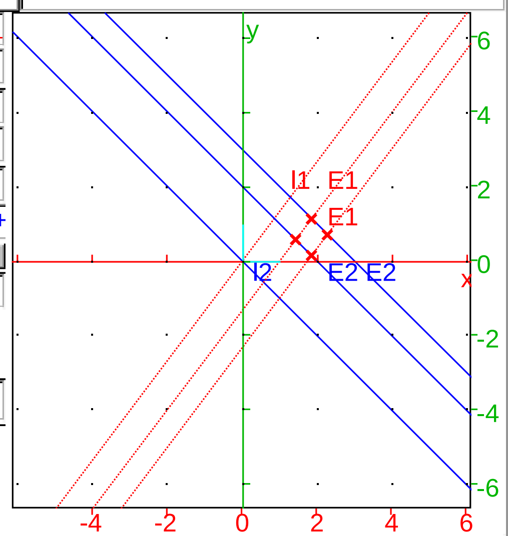
3 E1:=[l1+1,l1+1-I]; E2:=[l2+2,l2+3];

[pnt(pnt[line[1,4+4*I],10485761,"E1"]),pnt(pnt[line[1-I,4+

4 inter(E1,E2,couleur=(red+point_width_2));

[point(10/7,4/7),point(13/7,8/7),point(13/7,1/7),point(16

5



6 Fig Edit Graph Pointer Mode Save

1 af:='couleur'=(red+point_width_2+hidden_name); #on sauve le

'couleur'=-2146959359

2 l:=[point(1+I,af),point([2,3],af)];

[point(1,1),polygone(point(2,0),point(3,0))]

3 A:=point(-2.098,1.039,'couleur'=(red+point_width_2+hidden_r

point(-2.098,1.039)

4 af:=objet->couleur(objet,blue+point_width_2+hidden_name)

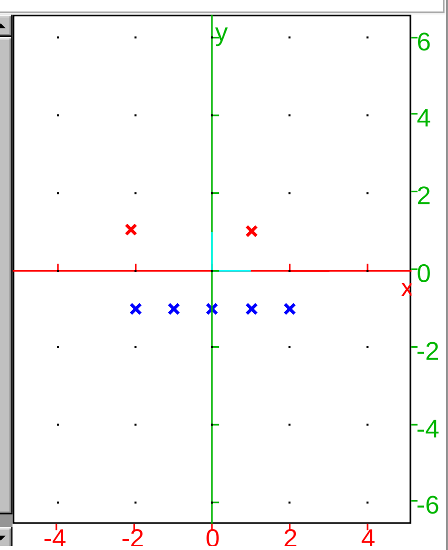
// Success
// End defining af

(objet)->couleur(objet,bleu+point_width_2+hidden_r

5 seq(af(point(i,-1)),i=-2..2);

[point(-2,-1),point(-1,-1),point(0,-1),point(1,-1),point(2,-

6



7 ---Exercice--------------------------------

8 cardi:=A->if det(A)=0 then print("cardinal infini") else
abs(det(A)) fi;

// Success
// End defining cardi

A -> if det(A)=0 then
print("cardinal infini") else
abs(det(A))
fi

Menu

9 A:=matrix([[2*4,4,15*4,0],[8,12,18,36],[16,16,32,32],[32,32,32,32]]);

$$\begin{bmatrix} 8 & 4 & 60 & 0 \\ 8 & 12 & 18 & 36 \\ 16 & 16 & 32 & 32 \\ 32 & 32 & 32 & 32 \end{bmatrix}$$

Menu

10 B:=ismith(A)[2];cardi(A);

$$\left(\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 16 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 672 \end{bmatrix}, 86016\right)$$

Menu

11 M/N=M/image(A) il est donc isomorphe a M/B ou B=ismith(A) le
cardinal est donc infini s'il y a un 0 sur la diagnonale de B,
sinon c'est le produit des termes diagonaux de B, donc aussi |detB|=|det A| (dans le cas d'une matric

12 abs(det(B)),abs(det(A)); #dans les 2 cas, c'est le cardinal.

(86016 86016)

Menu

13 A:=matrix([[2*4,4,15*4,0],[8,12,18,36],[16,16,32,32],[24,28,50,68]]);

$$\begin{bmatrix} 8 & 4 & 60 & 0 \\ 8 & 12 & 18 & 36 \\ 16 & 16 & 32 & 32 \\ 24 & 28 & 50 & 68 \end{bmatrix}$$

Menu

14 ismith(A)[2]; cardi(A);

"cardinal infini"

$$\left(\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 16 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, 1\right)$$

Menu

15 A:=matrix([[2*4,4,15*4,0,16],[8,12,18,36,28],[16,16,32,32,32],[24,28,50,68,68]]);

$$\begin{bmatrix} 8 & 4 & 60 & 0 & 16 \\ 8 & 12 & 18 & 36 & 28 \\ 16 & 16 & 32 & 32 & 32 \\ 24 & 28 & 50 & 68 & 68 \end{bmatrix}$$

Menu

16
```
ismith(A)[2]; cardi(A);
```
"cardinal infini"

$$\left(\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 8 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 16 & 0 \end{bmatrix}, 1\right)$$

Menu

17
```
v1:=[1,2];v2:=[-1,1];v3:=[0,2];
```
$$\left(\begin{bmatrix} 1 & 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 2 \end{bmatrix}\right)$$

Menu

18 On fait quelques combinaisons lineaires au hasard, ca serait mieux de trouver une base (on le fera pl

19
```
l:=seq(seq(seq(couleur(point(i*v1+j*v2+k*v3),blue+point_width_1+hidden_name),k=-5..5),j=-5..5),i=-5..5):
```
Done

Menu

20
```
ismith(transpose(matrix([v1,v2,v3]))); #le reseau engendre est bien Z^2
```
$$\left(\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & -3 \end{bmatrix}\right)$$

Menu

21
```
v1:=[1,I]*v1;v2:=[1,I]*v2;v3:=[1,I]*v3; #notation complexe plus pratique pour les dessins.
```
(1+2*I, -1+I , 2*I)

Menu

22
```
d1:= [seq(droite(0,v1)+i*v2,i=-10..10)]:
```
Done

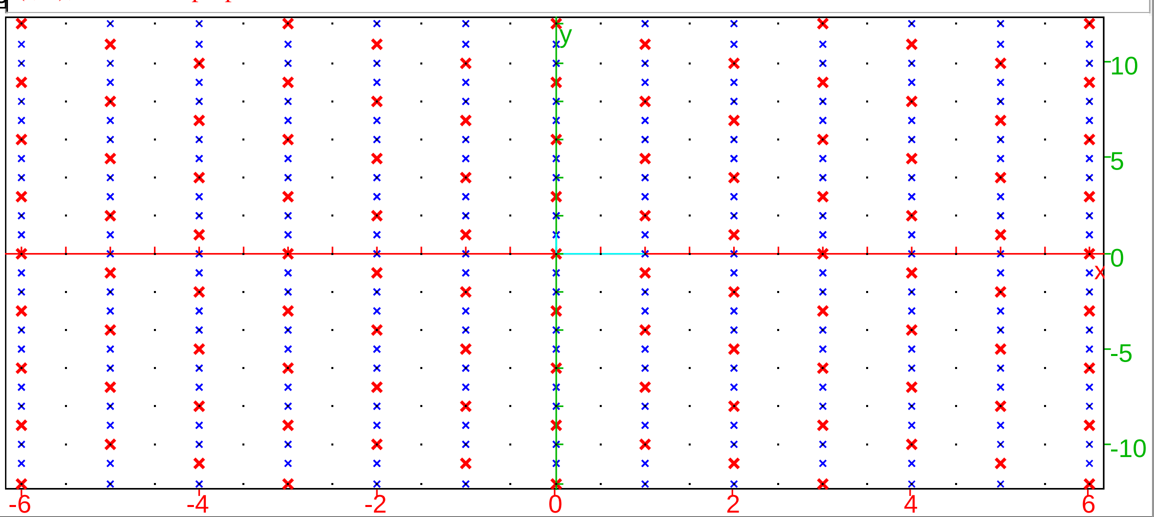
Menu

23
```
d2:= [seq(droite(0,v2)+i*v1,i=-10..10)]:
```
Done

Menu

24
```
l2:= couleur(inter(d1,d2),red+point_width_2+hidden_name):
```
Done

Menu

25
```
(l,l2);# ca ne rempli pas tout
```


26 aucun des 3 determinants (v1,v2) (v1,v3) (v2,v3) n'est inversible dans Z, on ne peut donc pas en extr

27 ---Exercice--------------------------------

Famille generatrice de I comme Z module: les generateurs et leurs multiples par Isqrt(5)

28 M:=transpose(matrix([[2,0],[3,3],[0,2],[-15,3]]));

$$\begin{bmatrix} 2 & 3 & 0 & -15 \\ 0 & 3 & 2 & 3 \end{bmatrix}$$

29 ismith(M);#Donc N(I)=2

$$\left(\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -7 & 0 & 21 & 15 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -6 & -3 \\ -1 & 0 & 3 & 2 \end{bmatrix}\right)$$

30 l1:=[seq(couleur(droite(-10,10)+I*i*sqrt(5),red+dash_line),i=-10..10)]: #les lignes du reseau.

Done

31 couleur(hidden_name); #On le met en global.

0

32 c1:=[seq(couleur(droite(-10*I,10*I)+i,red+dash_line),i=-10..10)]: #les colonnes du reseau.

Done

33 Pour le reseau associe a I on cherche d'abord une base de I comme Z module, soit avec ismith soit c

34 M:=matrix([[2,1],[0,1]]); #est une base de I

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

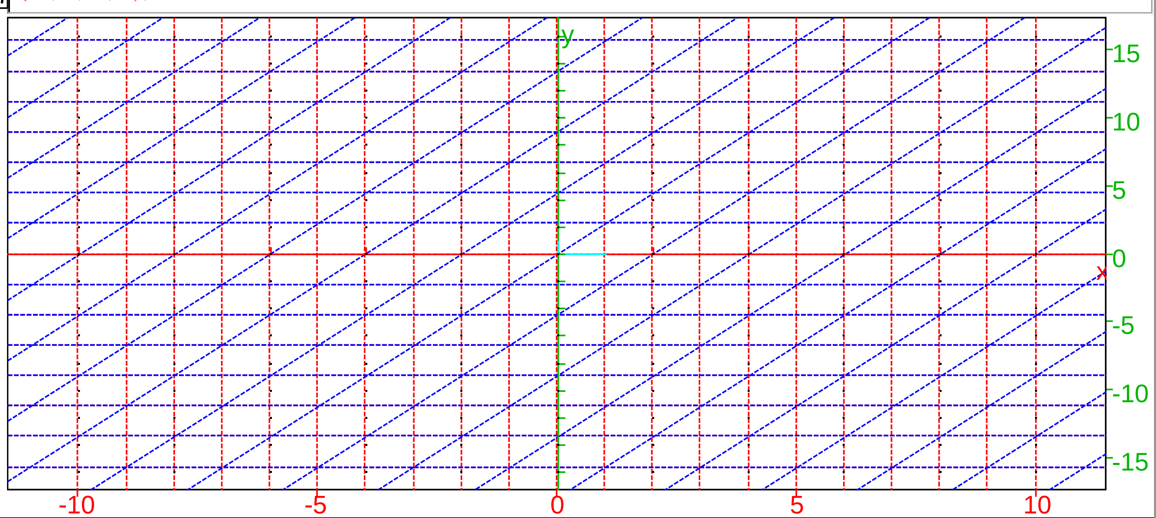
35 l2:=[seq(couleur(droite(2*i-10-10*sqrt(5)*I,2*i+10+10*sqrt(5)*I),blue+dash_line),i=-10..10)]:

Done

36 c2:=[seq(couleur(droite(-10+i+i*sqrt(5)*I,10+i+i*sqrt(5)*I),blue+dash_line),i=-10..10)]:

Done

37 (c1,l1,c2,l2);



38 Attention, le fait d'avoir dessiner des mailles est tendencieux, ca
n'est pas par qu'un maillage n'est pas orthogonal qu'il n'en existe
pas un autre orthogonal. Pour conclure correctement que I n'est pas
principal, il faut dire qu'on ne voit pas de rectangle d'aire 2
semblable au rectangle de cot{'e} 1 et sqrt(5)

39 base de R: (1,a,a^2,a^3) ou a=i.5^(1/4). Il faut une famille generatrice de I comme Z-module. I=(2,1-a^2). R=Z[a]/(a^4-5)

40
```
M:=2*identity(4);N:=matrix([[1,0,-5,0],[0,1,0,-5],[-1,0,1,0],[0,-1,0,1]]);
```

$$\left(\begin{bmatrix}2&0&0&0\\0&2&0&0\\0&0&2&0\\0&0&0&2\end{bmatrix},\begin{bmatrix}1&0&-5&0\\0&1&0&-5\\-1&0&1&0\\0&-1&0&1\end{bmatrix}\right)$$

Menu

41
```
#verification:
```

Syntax compatibility mode maple
Parse error line 2 at/

undef

Menu

42
```
a:='a';
```

a not assigned

Menu

43
```
transpose(matrix(4,1,(i,j)->a^(i-1))).N;
```

// Warning: a declared as global variable(s)

$$\begin{bmatrix}-a^2+1 & -a^3+a & a^2-5 & a^3-5\cdot a\end{bmatrix}$$

Menu

44
```
seq(rem(a^(i)*(1-a^2),a^4-5,a),i=0..3);
```

$$(-a^2+1,\ -a^3+a,\ a^2-5,\ a^3-5\cdot a)$$

Menu

45
```
M:=augment([M,N]); #est generatrice de I comme Z module
```

$$\begin{bmatrix}2&0&0&0&1&0&-5&0\\0&2&0&0&0&1&0&-5\\0&0&2&0&-1&0&1&0\\0&0&0&2&0&-1&0&1\end{bmatrix}$$

Menu

46
```
ismith(M);# Donc R/I est de cardinal 4.
```

$$\left(\begin{bmatrix}0&0&-1&0\\0&0&0&-1\\1&0&1&0\\0&1&0&1\end{bmatrix},\begin{bmatrix}1&0&0&0&0&0&0&0\\0&1&0&0&0&0&0&0\\0&0&2&0&0&0&0&0\\0&0&0&2&0&0&0&0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0&0&1&0&1&0&0&0\\0&0&0&1&0&1&0&0\\0&0&0&0&-1&0&2&0\\0&0&0&0&0&-1&0&2\\1&0&0&0&-2&0&5&0\\0&1&0&0&0&-2&0&5\\0&0&0&0&0&0&1&0\\0&0&0&0&0&0&0&1\end{bmatrix}\right)$$

Menu

47
```
(i,j,k,l):='i','j','k','l': #on libere i,j,k,l
```

Done

Menu

48
```
z:=i+j*a+k*a^2+l*a^3;
```

$$i+j\cdot a+k\cdot a^2+l\cdot a^3$$

Menu

49 MM:=transpose(matrix([seq(symb2poly(rem(expand(a^(u)*z),a^4-5,a),a),u=0..3)]));

$$\begin{bmatrix} l & k & j & i \\ k & j & i & 5\cdot l \\ j & i & 5\cdot l & 5\cdot k \\ i & 5\cdot l & 5\cdot k & 5\cdot j \end{bmatrix}$$

Menu

50 normez:=det(MM);

$$-125\cdot l^4 - (-100)\cdot l^2\cdot k\cdot i - (-50)\cdot l^2\cdot j^2 - 100\cdot l\cdot k^2\cdot j - 20\cdot l\cdot j\cdot i^2 - (-25)\cdot k^4 - 10\cdot k^2\cdot i^2 - (-20)\cdot k$$

Menu

51 normez mod 5; # -1=x^4 mod 5 n'a pas de solutions, donc on ne peut pas avoir N(I)=N(z) puisque c'est imposs

$$i^4$$

Menu

52 --Exercice--------------------------------

53 A:=matrix([[2*4,4,15*4,0],[8,12,18,36],[16,16,32,32],[32,32,32,32]]);

$$\begin{bmatrix} 8 & 4 & 60 & 0 \\ 8 & 12 & 18 & 36 \\ 16 & 16 & 32 & 32 \\ 32 & 32 & 32 & 32 \end{bmatrix}$$

Menu

54 (U,B,V):=ismith(A);

$$\left(\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -57 & -50 & 0 & 26 \\ -12 & -24 & 43 & -11 \\ -184 & -352 & 608 & -149 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 16 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 672 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 16 & -96 & -21603 & 64170 \\ 0 & 1 & 224 & -666 \\ 1 & -6 & -1350 & 4010 \\ -4 & 24 & 5401 & -16043 \end{bmatrix} \right)$$

Menu

55 (U*A*V-B);#verification.

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Menu

56 (U^(-1)),(U^(-1)*B);#est une base de M resp N;

$$\left(\begin{bmatrix} 94 & -281 & -15808 & 1118 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 80 & -236 & -13277 & 939 \\ 208 & -616 & -34656 & 2451 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 188 & -1124 & -252928 & 751296 \\ 2 & 0 & 0 & 0 \\ 160 & -944 & -212432 & 631008 \\ 416 & -2464 & -554496 & 1647072 \end{bmatrix} \right)$$

Menu

57 --Exercice--------------------------------

58 `M:=matrix(7,7,(i,j)->if i=j-1 then 1 else 0 fi):M[1,1]:=1:M[2,2]:=1:M[2,3]:=0:M[4,5]:=0:M;`

// Success

$$\left(\text{Done},\ \text{Done},\ \text{Done},\ \text{Done},\ \text{Done},\ \begin{bmatrix}1&1&0&0&0&0&0\\0&1&0&0&0&0&0\\0&0&0&1&0&0&0\\0&0&0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0&1&0\\0&0&0&0&0&0&1\\0&0&0&0&0&0&0\end{bmatrix}\right)$$

Menu

59 `pari(); #on charge pari`

All PARI functions are now defined with the pari_ prefix.
PARI functions are also defined without prefix except:
abs acos acosh arg asin asinh atan atanh binomial bitand bitor bitxor ceil charpoly concat conj cont
Note that p-adic numbers must have O argument quoted e.g. 905/7+O('7^3')
Type ?pari for short help
Inside xcas, try Help->Manuals->PARI for HTML help

Menu

60 Dans pari l'instruction pour la forme de smith est matsnf. Ici il faut mettre l'option 2 pour preciser que

61 `matsnf(M-x*identity(7),2);`

$$\left[x^5-2\cdot x^4+x^3\quad x^2\quad 1\quad 1\quad 1\quad 1\quad 1\right]$$

Menu

62