1 restart;maple_mode(1);cas_setup(0,0,0,1,0,1e-10,10,[1,50,0,25],0,0,0); #radians,pas de cmplx, pas de Sqrt

Menu

2 On prend une conique passant par (0,0,1), puis on change de variable.

3 C:=add(add(rand(20)()*x[i]*x[j],i=1..3),j=1..2);

$19\cdot(x[1])\cdot(x[1])+15\cdot(x[2])\cdot(x[1])+7\cdot(x[3])\cdot(x[1])+4\cdot(x[1])\cdot(x[2])+10\cdot(x[2])\cdot(x[2])+17\cdot(x[3])\cdot(x[2]$

Menu

4 C:=normal(subs(x[1]=x[1]-x[3],x[2]=x[2]-x[3],C));

$19\cdot(x[1])^2+19\cdot(x[1])\cdot(x[2])+(-50)\cdot(x[1])\cdot(x[3])+10\cdot(x[2])^2+(-22)\cdot(x[2])\cdot(x[3])+24\cdot(x[3])^2$

Menu

5 On cree la fonction associee a l'equation de la conique. On verifie qu'elle contient: (1,1,1)

6 c:=unapply(C,x);c([1,1,1])

$\left(x \to 19\cdot(x[1])^2+19\cdot(x[1])\cdot(x[2])+(-50\cdot(x[1]))\cdot(x[3])+10\cdot(x[2])^2+(-22\cdot(x[2]))\cdot(x[3])+24\cdot(x[3])^2,\ 0\right)$

Menu

7 purge(u,v,a);M:=[1,1,1]+a*[u,v,0];

(u not assigned , v not assigned , a not assigned , $[1+u\cdot a \quad 1+v\cdot a \quad 1]$)

Menu

8 s:=simplify(c(M)/a);

$19\cdot a\cdot u^2+19\cdot a\cdot u\cdot v+10\cdot a\cdot v^2+7\cdot u+17\cdot v$

Menu

9 para:=-coeff(s,a,1)*[1,1,1]+coeff(s,a,0)*[u,v,0];

Menu

10 normal(c(para)); # verification:

0

Menu

11 la tangente au point para est la droite AB

12 A1:=[seq(diff(para[i],u),i=1..3)];

$[-(19\cdot 2\cdot u-19\cdot v)+7\cdot u+17\cdot v+u\cdot 7 \quad -(19\cdot 2\cdot u-19\cdot v)+v\cdot 7 \quad -(19\cdot 2\cdot u-19\cdot v)]$

Menu

13 B1:=[seq(diff(para[i],v),i=1..3)];

$[-(19\cdot u-10\cdot 2\cdot v)+u\cdot 17 \quad -(19\cdot u-10\cdot 2\cdot v)+7\cdot u+17\cdot v+v\cdot 17 \quad -(19\cdot u-10\cdot 2\cdot v)]$

Menu

14 AB:=simplify(a*A1+b*B1);

$[-24\cdot a\cdot u-2\cdot a\cdot v-2\cdot b\cdot u-20\cdot b\cdot v \quad -38\cdot a\cdot u-12\cdot a\cdot v-12\cdot b\cdot u-(-14\cdot b)\cdot v \quad -38\cdot a\cdot u-$

Menu

15 factor(c(AB)); # On trouve bien une racine double

$3720\cdot(a\cdot v-u\cdot b)^2$

Menu

16 tgte:=add(subs({x[1]=para[1],x[2]=para[2],x[3]=para[3]},diff(C,x[i]))*x[i],i=1..3);

$(38\cdot(x[1])+19\cdot(x[2])-50\cdot(x[3]))\cdot(x[1])+(19\cdot(x[1])+20\cdot(x[2])-22\cdot(x[3]))\cdot(x[2])+(-50\cdot(x[1])-22\cdot(x$

Menu

17 verification:

18 simplify(subs({seq(x[i]=A[i],i=1..3)},tgte));

$38\cdot(x[1])^2+38\cdot(x[1])\cdot(x[2])+(-100\cdot(x[1]))\cdot(x[3])+20\cdot(x[2])^2+(-44\cdot(x[2]))\cdot(x[3])+48\cdot(x[3])^2$

Menu

19 simplify(subs({seq(x[i]=B[i],i=1..3)},tgte));

$38\cdot(x[1])^2+38\cdot(x[1])\cdot(x[2])+(-100\cdot(x[1]))\cdot(x[3])+20\cdot(x[2])^2+(-44\cdot(x[2]))\cdot(x[3])+48\cdot(x[3])^2$

Menu

20 paff:=w->(subs(v=1,(w[1]+I*w[2])/w[3]));

// Warning: v declared as global variable(s)
// End defining paff

w -> subs(v=1,(w[1]+(I)*w[2])/(w[3]))

Menu

21 DC:=plotparam(paff(para),u=-5..5,affichage=bleu+line_width_2):

Done

Menu

22

23 Fig Edit Graph Pointer Mode Save

1 DC;

plotparam((-19*u^2-19*u-10+u*(7*u+17)+(l)*(-19*u

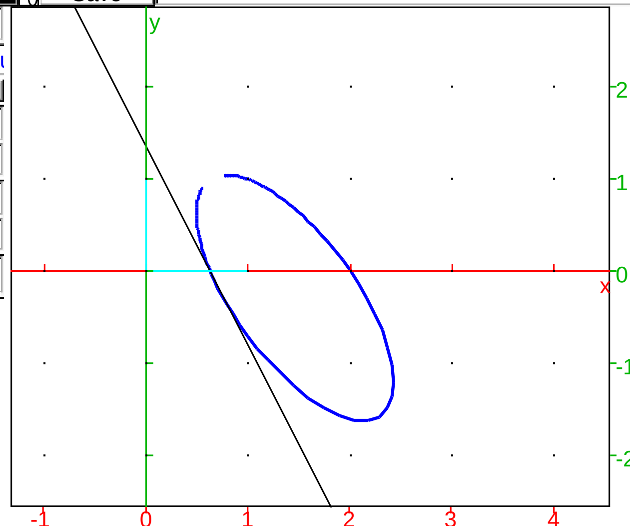
2 u:=element((-3) .. 3,0.24)

parameter(u,-3,3,0.24,0.06)

3 droite(paff(A1),paff(B1));

droite(y=(-2.157736068*x+1.34651607))

4



24 ---

25 On peut param{'e}trer les equations cart{'e}siennes, ie on en choisit 2
ind{'e}pendantes et on regarde leur combinaisons lineaires, ou bien on
considere une droite projective d ne passant pas par le point O, et
l'on identifie les droites passant par O aux droites (OM) lorsque M decrit D

26 purge(s,t)

$$(19\cdot a\cdot u^2+19\cdot a\cdot u\cdot v+10\cdot a\cdot v^2+7\cdot u+17\cdot v,\quad \text{t not assigned})$$

Menu

27 A:=matrix(2,2,(i,j)->a[i,j]);

// Warning: a declared as global variable(s)

$$\begin{bmatrix} a[[1,1]] & a[[1,2]] \\ a[[2,1]] & a[[2,2]] \end{bmatrix}$$

Menu

28 On modelise les droites passant par O1 par leur equations cartesiennes, ie les
combinaisons lineaires de x et y, et celles passant par O2 comme les droites
(O2,V) ou V bouge sur une droite ne passant pas par O2. Ex on a choisi pour V
la droite: y=z. On cree maintenant l'homographie h: (s,t)->(s',t'), qui a la
droite d'equation sx+ty=0 associe la droite passant par O2 et (s',t',t')

29 tmpV:=A*[[s],[t]]; #On veut que tmpV[i] represente les colonnes de A(s,t).

$$\begin{bmatrix} t\cdot(a[[1,2]])+s\cdot(a[[1,1]]) \\ t\cdot(a[[2,2]])+s\cdot(a[[2,1]]) \end{bmatrix}$$

Menu

30 V:=[tmpV[1,1],tmpV[2,1],tmpV[2,1]]; #On met le point V sur la droite y=z choisie.

$$[\,t\cdot(a[[1,2]])+s\cdot(a[[1,1]])\quad t\cdot(a[[2,2]])+s\cdot(a[[2,1]])\quad t\cdot(a[[2,2]])+s\cdot(a[[2,1]])\,]$$

Menu

31 c'est plus simple de prendre 1 forme cartesienne, et une parametrique.
On etudie O_2+l.V inter sx+ty=0

32 O2:=[0,1,0]; # les coordonees de O_2

$$[0\quad 1\quad 0]$$

Menu

33 [X,Y,Z]:=O2+l*V

$$[(t\cdot(a[[1,2]])+s\cdot(a[[1,1]]))\cdot l\quad 1+(t\cdot(a[[2,2]])+s\cdot(a[[2,1]]))\cdot l\quad (t\cdot(a[[2,2]])+s\cdot(a[[2,1]]))\cdot$$

Menu

34 L:= solve(s*X+t*Y=0,l);

$$-\left(\frac{t}{(a[[1,2]])\cdot t\cdot s+t^2\cdot(a[[2,2]])+t\cdot s\cdot(a[[2,1]])+s^2\cdot(a[[1,1]])}\right)$$

Menu

35 Attention solve travaille generiquement: par exemple si a(1,1) est nul, il faudrait simplifier par t
NB det(A) n'est pas nul, donc sa seconde ligne non plus.
Pb solve a suppose que l'un des 2 coeffs de la seconde ligne est nul en s=0 ou t=0
le point d'intersection est:

36 S:=O2+L*V;

$$\left[(t\cdot(a[[1,2]])+s\cdot(a[[1,1]]))\cdot\left(-\left(\frac{t}{(a[[1,2]])\cdot t\cdot s+t^2\cdot(a[[2,2]])+t\cdot s\cdot(a[[2,1]])+s^2\cdot(a[[1,1]])}\right.\right.\right.$$

37 Il aurait mieux valu ne pas utiliser solve. par exemple rester en homog{'e}ne ainsi:

38 L1:=-coeff(s*X+t*Y,l,1);L2:=coeff(s*X+t*Y,l,0);

$$(-s^2\cdot(a[[1,1]])-s\cdot t\cdot(a[[1,2]])-s\cdot t\cdot(a[[2,1]])-t^2\cdot(a[[2,2]]),\ t)$$

39 S:=L1*O2+L2*V;

$$[(t\cdot(a[[1,2]])+s\cdot(a[[1,1]]))\cdot t\ -s^2\cdot(a[[1,1]])-s\cdot t\cdot(a[[1,2]])-s\cdot t\cdot(a[[2,1]])-t^2\cdot(a[[2,$$

40 le cas a(1,1)=0 pose PB. si a(1,1)=0 ca n'est pas bon, il faut simplifier par t

41 purge(X,Y,Z);

42 On passe maintenant en version affine z=1
Moralement X:=S[1]/S[3];Y:=S[2]/S[3];

43 P:=subs(t=1,X*S[3]-S[1]);Q:=subs(t=1,Y*S[3]-S[2]);

$$(X\cdot(1\cdot(a[[2,2]])+s\cdot(a[[2,1]]))\cdot 1-(1\cdot(a[[1,2]])+s\cdot(a[[1,1]]))\cdot 1,\ -\ \frac{s^2\cdot(a[[1,1]])+s\cdot 1\cdot(a[[1}{(1\cdot(a[[2,2]])+s\cdot(a[[2,}$$

44 R:=resultant(P,Q,s);

$$(a[[1,2]])^2\cdot X\cdot(a[[2,1]])-(a[[1,2]])\cdot(a[[1,1]])\cdot X\cdot(a[[2,2]])-(a[[1,2]])\cdot(a[[1,1]])\cdot(a[[$$
$$-(a[[1,2]])\cdot X^2\cdot(a[[2,2]])\cdot(a[[2,1]])+(a[[1,2]])\cdot X\cdot(a[[2,1]])^2\cdot Y+(a[[1,1]])^2\cdot(a[[2,2]]$$

45 eq:=factor(Z^2*subs(X=X/Z,Y=Y/Z,R)); #On recupere l'equation homogene.

46 eq:=simplify(eq/det(A)); #detA se factorise. On peut simplifiler car il est non nul

$$X^2\cdot(a[[2,2]])-X\cdot Y\cdot(a[[2,1]])-X\cdot Z\cdot(a[[1,2]])+Y\cdot Z\cdot(a[[1,1]])$$

47 f:=unapply(eq,X,Y,Z);

$$(X,Y,Z)\to X^2\cdot(a[[2,2]])-X\cdot Y\cdot(a[[2,1]])-X\cdot Z\cdot(a[[1,2]])+Y\cdot Z\cdot(a[[1,1]])$$

48 f(0,0,1);f(op(O2));#sont solutions evidentes.

$$(0,\ 0)$$

49 la droite (O_1O_2) a pour equation yo2.x-xo2.y=0, ie (s,t)=(yo2,-xo2) dans le
faisceau sx+ty=0. En revanche on a parametre le faisceau en O_2
grace au point (s',t',t') qui est sur la droite (O_1O_2) ssi s'.yo2-xo2.t'=0.
on doit donc exprimer h(yo2,-xo2) proportionnel a (xo2,yo2).

50 [xo2,yo2,zo2]:=O2;

$$[0\quad 1\quad 0]$$

51 V1:=A*matrix([[yo2],[-xo2]]);

$$\begin{bmatrix} a[[1,1]] \\ a[[2,1]] \end{bmatrix}$$

52 V2:=matrix([[xo2],[yo2]]);

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

53 casparticulier:=det(concat(V1,V2));

$$a[[1,1]]$$

54 factor(subs(casparticulier=0,f(x,y,z)));

$$x\cdot((a[[2,2]])\cdot x-y\cdot(a[[2,1]])-z\cdot(a[[1,2]]))$$

55 l'equation de degre 2 se factorise par x ssi A[1,1]=0 ssi h(O_1O_2)=(O_1O_2)
on recommence avec un autre O_2

56 xo2:=1;yo2:=0;zo2:=1;# les coordonees de O_2

(1, 0, 1)

57 O2:=[xo2,yo2,zo2];

[1 0 1]

58 [X,Y,Z]:=O2+l*V;

59 L1:=-coeff(s*X+t*Y,l,1);L2:=coeff(s*X+t*Y,l,0);

$\left(-s^2\cdot(a[1,1]) - s\cdot t\cdot(a[1,2]) - s\cdot t\cdot(a[2,1]) - t^2\cdot(a[2,2]),\ s\right)$

60 S:=L1*O2+L2*V;

$\left[-s^2\cdot(a[1,1]) - s\cdot t\cdot(a[1,2]) - s\cdot t\cdot(a[2,1]) - t^2\cdot(a[2,2]) + (t\cdot(a[1,2]) + s\cdot(a[1,1\right.$

61 pour calculer le resultant on travaille a une variable: ex on fait t=1
cette fois, On parametre les droites passant par O_2 via les equations
les droites passant par (1,0,1) sont: s'*(x-z)+t'*y

62 L1:=s*x+y;

$s\cdot x+y$

63 L2:=op([x-z,y]*A*[[s],[1]]);

$(a[1,2])\cdot(x-z)+s\cdot((a[1,1])\cdot(x-z)+y\cdot(a[2,1]))+y\cdot(a[2,2])$

64 eq:=resultant(L1,L2,s); #On a l'equation cartesienne tout de suite

65 On a donc montr{'e} que si h est une homographie entre deux faisceaux de droites
disctincts le lieu de points d'intersection entre d et h(d) decrit une conique
non degeneree passant par O1 et O2 si h(O1O2) est different de (O1O2), et
decrit une droite si h(O1O2)=(O1O2)

66 a:=[[1,1],[2,3]];

$\begin{bmatrix}1 & 1\\ 2 & 3\end{bmatrix}$

67

68 Fig Edit Graph Pointer Mode Save

1 implicitplot(subs(z=1,eq),x=-5..5,y=-5..5,couleur=
Hyperbola of center (1/6,1/3)
Evaluation time: 0.5
[plotparam(Done,t=-3.0..3.0),plotparam(Done,t=-3

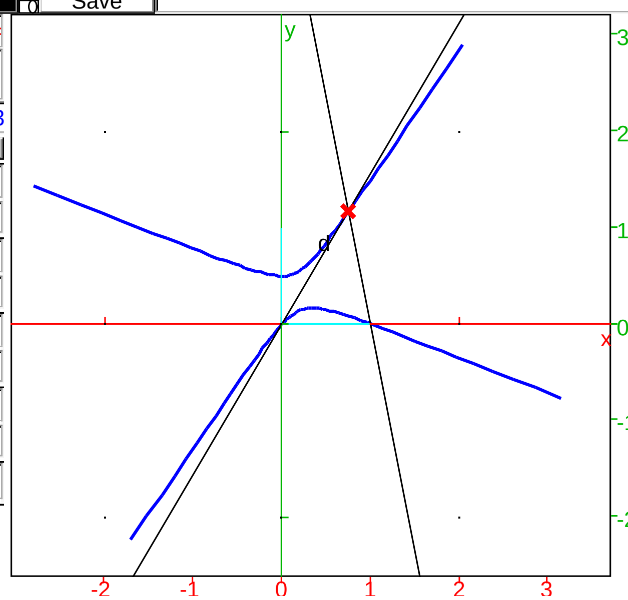
2 s:=element((-2) .. 2,-1.56)
parameter(s,-2,2,-1.56,0.04)

3 d:=droite(L1=0);
droite(y=(1.56*x))

4 hd:=droite(subs(z=1,L2)=0);
droite(y=(-4.666666667*x+4.666666667))

5 inter(d,hd,couleur=red+point_width_3)
[point(0.7494646681,1.169164882)]

6



69 --