

1 restart;maple_mode(1);cas_setup(0,0,0,1,0,1e-10,25,[1,50,0,25],0,0,0);#radians,pas de cmplx, pas de Sqrt

2 diag(seq(1,4)); diag(seq(i,i=1..4));

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 4 \end{array} \right)$$

3 A:=matrix(4,4)+1;v:=[seq(1,j=1..4)];

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 1 & 1 & 1 & & & & \\ 1 & 1 & 1 & 1 & & & & \\ 1 & 1 & 1 & 1 & & & & \\ 1 & 1 & 1 & 1 & & & & \end{array} \right), [1 \ 1 \ 1 \ 1]$$

4 A*v;# Attention il retourne une ligne

$$[4 \ 4 \ 4 \ 4]$$

5 purge(a);

No such variable a

6 f:=(i,j)->if (i=j) then 0 else if (i<j) then a[i,j] else -a[j,i] fi;fi;

```
// Warning: a declared as global variable(s)
// End defining f
if i=j then
0 else
if i<j then
a[i,j] else
-(a[j,i])
fi
fi
(i, j )> fi
```

7 matrix(4,4,f); d:=det(matrix(4,4,f));

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 0 & a[1, 2] & a[1, 3] & a[1, 4] & & & & \\ -(a[1, 2]) & 0 & a[2, 3] & a[2, 4] & & & & \\ -(a[1, 3]) & -(a[2, 3]) & 0 & a[3, 4] & & & & \\ -(a[1, 4]) & -(a[2, 4]) & -(a[3, 4]) & 0 & & & & \end{array} \right), \text{Done}$$

8 factor(d);#c'est toujours un carre

$$((a[1, 2]) \cdot (a[3, 4]) - (a[1, 3]) \cdot (a[2, 4]) + (a[1, 4]) \cdot (a[2, 3]))^2$$

9 M:=matrix(8,8,f);

$$\begin{array}{cccccccc} 0 & a[1, 2] & a[1, 3] & a[1, 4] & a[1, 5] & a[1, 6] & a[1, 7] & \\ -(a[1, 2]) & 0 & a[2, 3] & a[2, 4] & a[2, 5] & a[2, 6] & a[2, 7] & \\ -(a[1, 3]) & -(a[2, 3]) & 0 & a[3, 4] & a[3, 5] & a[3, 6] & a[3, 7] & \\ -(a[1, 4]) & -(a[2, 4]) & -(a[3, 4]) & 0 & a[4, 5] & a[4, 6] & a[4, 7] & \\ -(a[1, 5]) & -(a[2, 5]) & -(a[3, 5]) & -(a[4, 5]) & 0 & a[5, 6] & a[5, 7] & \\ -(a[1, 6]) & -(a[2, 6]) & -(a[3, 6]) & -(a[4, 6]) & -(a[5, 6]) & 0 & a[6, 7] & \\ -(a[1, 7]) & -(a[2, 7]) & -(a[3, 7]) & -(a[4, 7]) & -(a[5, 7]) & -(a[6, 7]) & 0 & \\ -(a[1, 8]) & -(a[2, 8]) & -(a[3, 8]) & -(a[4, 8]) & -(a[5, 8]) & -(a[6, 8]) & -(a[7, 8]) & \end{array}$$

10 Methode type pivot, contre m'e)thode de Laplace,... mais ici la matrice est antisymetrique.

11 d1:=det(M);

Evaluation time: 5.16

Done

12 d2:=det_minor(M);

Done

```

13 normal(d1-d2);
Evaluation time: 2.31
0
Menu
14 -----Illustration de la reduction de Jordan-----
Construction de l'exemple: on veut une reponse de ce type:
15 f:=(i,j)->if(i=j-1) then 1 else 0 fi;
// Success
// End defining f
if i=(j-1) then
1 else
0
(i, j )> fi
Menu
16 J:=matrix(8,8,f);#forme classique d'ordre 8.
0 1 0 0 0 0 0 0
0 0 1 0 0 0 0 0
0 0 0 1 0 0 0 0
0 0 0 0 1 0 0 0
0 0 0 0 0 1 0 0
0 0 0 0 0 0 1 0
0 0 0 0 0 0 0 1
0 0 0 0 0 0 0 0
Menu
17 J[3,4]:=0;J[6,7]:=0;J;#2 blocs d'ordre 3 et un d'ordre 2.
( Done, Done,
0 1 0 0 0 0 0 0
0 0 1 0 0 0 0 0
0 0 0 0 0 0 0 0
0 0 0 0 1 0 0 0
0 0 0 0 0 1 0 0
0 0 0 0 0 0 0 0
0 0 0 0 0 0 0 1
0 0 0 0 0 0 0 0
Menu
18 On veut faire un changement de base simple. Ex det=1 pour garder des coeffs entiers.
on cree une transvection:
19 f:=(i,j)->if(i=j) then 1 else 0 fi;
// Success
// End defining f
if i=j then
1 else
0
(i, j )> fi
Menu
20 T:=proc(i,j,a)
local A;
A:=matrix(8,8,f):A[i,j]:=a;
end proc;
// Warning: f declared as global variable(s)
// End defining T
proc(i,j,a)
local A;
A:=matrix(8,8,f);
A[i,j]:=a;
A;

```

21 B:=matrix(8,8,b);

b	b	b	b	b	b	b	b	b
b	b	b	b	b	b	b	b	b
b	b	b	b	b	b	b	b	b
b	b	b	b	b	b	b	b	b
b	b	b	b	b	b	b	b	b
b	b	b	b	b	b	b	b	b
b	b	b	b	b	b	b	b	b
b	b	b	b	b	b	b	b	b

22 faire $L_i \leftarrow -L_i + aL_j$ c'est multiplier a gauche par $T(i,j,a)$.
Par exemple $L_3 \leftarrow -L_3 + aL_2$ c'est multiplier a GAUCHE par: $T(3,2,a)$;

23 $T(3,2,a)*B$;

b	b	b	b	b	b	b	b	b
b	b	b	b	b	b	b	b	b
$a \cdot b + b$	$a \cdot b + b$	$a \cdot b + b$	$a \cdot b + b$	$a \cdot b + b$	$a \cdot b + b$	$a \cdot b + b$	$a \cdot b + b$	$a \cdot b + b$
b	b	b	b	b	b	b	b	b
b	b	b	b	b	b	b	b	b
b	b	b	b	b	b	b	b	b
b	b	b	b	b	b	b	b	b
b	b	b	b	b	b	b	b	b

24 En revanche: $C_2 \leftarrow -C_2 + aC_3$ c'est multiplier a DROITE par $T(3,2,a)$

25 $B*T(3,2,a)$;

b	$a \cdot b + b$	b	b	b	b	b	b
b	$a \cdot b + b$	b	b	b	b	b	b
b	$a \cdot b + b$	b	b	b	b	b	b
b	$a \cdot b + b$	b	b	b	b	b	b
b	$a \cdot b + b$	b	b	b	b	b	b
b	$a \cdot b + b$	b	b	b	b	b	b
b	$a \cdot b + b$	b	b	b	b	b	b
b	$a \cdot b + b$	b	b	b	b	b	b

26 Remarquer que l'inverse de $T(i,j,a)$ est $T(i,j,-a)$

27 $T(3,2,a)^{-1}$;

1	0	0	0	0	0	0	0	0
0	1	0	0	0	0	0	0	0
0	-a	1	0	0	0	0	0	0
0	0	0	1	0	0	0	0	0
0	0	0	0	1	0	0	0	0
0	0	0	0	0	1	0	0	0
0	0	0	0	0	0	1	0	0
0	0	0	0	0	0	0	1	0

28 Donc conjuguer par $T(i,j,a)$ c'est faire:
 $L_i \leftarrow -L_i + aL_j$ et $C_j \leftarrow -C_j - aC_i$

29 $P := T(6,7,2)*T(4,5,1)*T(3,2,2)*T(1,2,1)$;

```
30 P,P^(-1);
(
1 1 0 0 0 0 0 0 | 1 -1 0 0 0 0 0 0
0 1 0 0 0 0 0 0 | 0 1 0 0 0 0 0 0
0 2 1 0 0 0 0 0 | 0 -2 1 0 0 0 0 0
0 0 0 1 1 0 0 0 | 0 0 0 1 -1 0 0 0
0 0 0 0 1 0 0 0 | 0 0 0 0 1 0 0 0
0 0 0 0 0 1 2 0 | 0 0 0 0 0 1 -2 0
0 0 0 0 0 0 1 0 | 0 0 0 0 0 0 1 0
0 0 0 0 0 0 0 1 | 0 0 0 0 0 0 0 1
)
```

31 Donc faire a l'ordinateur:

```
32 N:=P*J*P^(-1);
Done
```

33 est identique a faire a la main a partir de J:
 $L1 \leftarrow L1+L2$; $C2 \leftarrow C2 - C1$ puis
 $L3 \leftarrow L3+2L2$; $C2 \leftarrow C2 - 2C3$
 $L4 \leftarrow L4+L5$; $C5 \leftarrow C5 - C4$
 $L6 \leftarrow L6 + 2L7$; $C7 \leftarrow C7 - 2C6$
 On a maintenant trouve un bel exercice: Trouver la forme de jordan de N et une matrice de passage pour l'obtenir.
 On calcule N^2 et son noyau.

```
34 N,N^2;
(
0 -1 1 0 0 0 0 0 | 0 -2 1 0 0 0 0 0
0 -2 1 0 0 0 0 0 | 0 0 0 0 0 0 0 0
0 -4 2 0 0 0 0 0 | 0 0 0 0 0 0 0 0
0 0 0 0 1 1 -2 0 | 0 0 0 0 0 1 -2 0
0 0 0 0 0 1 -2 0 | 0 0 0 0 0 0 0 0
0 0 0 0 0 0 0 2 | 0 0 0 0 0 0 0 0
0 0 0 0 0 0 0 1 | 0 0 0 0 0 0 0 0
0 0 0 0 0 0 0 0 | 0 0 0 0 0 0 0 0
)
```

```
35 N2:=nullspace(N^2);
-1 0 0 0 0 0 0 0
0 -1/2 -1 0 0 0 0 0
0 0 0 -1 0 0 0 0
0 0 0 0 -1 0 0 0
0 0 0 0 0 -2 -1 0
0 0 0 0 0 0 0 -1
```

36 on choisit a et b independants modulo ker N^2 (qui est aussi im N). (attention a et b hors de ker N^2 est insuffisant).

```
37 a:=[0,0,1,0,0,0,0,0]:b:=[0,0,0,0,1,0,0,0];
( Done, Done )
```

38 rank(matrix([op(N2),a,b]));# doit etre dim ker $N^2 + 2$.
 8

```
39 N1:=nullspace(N);
-1 0 0 0 0 0 0 0
0 0 0 -1 0 0 0 0
```

40 dim ker N^2 - dim ker $N = 6 - 3 = 2 + 1$ donc $N.a, N.b$ doit être complète par c
tq $N.a, N.b, c$ indep modulo ker N . Par exemple on prend celui là:

41 $c := [0, 0, 0, 0, 0, 0, 1]$:

Done

42 On vérifie qu'il convient:

43 $\text{rank}(\text{matrix}([\text{op}(N1), N^*a, N^*b, c]));$

6

44 dim ker N - dim ker $N^0 = 3$ c'est donc engendr{e} par $N^2.a, N^2.b, N.c$. Il n'y a plus rien à faire, et l'on prend la base suivante: (Attention pour x as $N^*a...$ sont des lignes, on prend donc la transposée)

45 $Q := \text{transpose}(\text{matrix}([(N^2)^*a, N^*a, a, (N^2)^*b, N^*b, b, N^*c, c]));$

1	1	0	0	0	0	0	0	0
0	1	0	0	0	0	0	0	0
0	2	1	0	0	0	0	0	0
0	0	0	1	1	0	0	0	0
0	0	0	0	1	0	0	0	0
0	0	0	0	0	1	2	0	0
0	0	0	0	0	0	0	1	0
0	0	0	0	0	0	0	0	1

46 On sait maintenant que $Q^{-1} \cdot N \cdot Q$ doit donner J . vérification:

47 $Q^{-1} \cdot N \cdot Q;$

0	1	0	0	0	0	0	0	0
0	0	1	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	1	0	0	0	0
0	0	0	0	0	1	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	1
0	0	0	0	0	0	0	0	0

48

49 Il s'agit donc de trouver les bases qui jordanisent l'endomorphisme.

On a $N^3 = 0$.

Il nous faut d'abord pour les 2 blocs de taille 3, une base de $\ker N^3 / \ker N^2$

que l'on remonte ensuite dans $\ker N^3$ (Choix de a et b dans la question précédente). Comme $\ker N^3 / \ker N^2$ est de dimension

2, on a déjà: $\text{card}(\text{GL}_2) \cdot (\text{card } \ker N^2)^2$. qui vaut: $(p^2 - 1) \cdot (p^2 - p) \cdot (p^6)^2$.

reste le choix d'un vecteur non nul de $\ker N^2 / (\ker N + \text{Im } N)$ que l'on remonte.

$\ker N + \text{Im } N$ est de dim $3 + 2$. On a donc $p - 1$ choix dans le quotient, soit $(p - 1) \cdot p^5$ choix pour le dernier vecteur à choisir (c dans la question précédente).

50 $\text{cardstab} := (p^2 - 1) \cdot (p^2 - p) \cdot p^{12} \cdot (p - 1) \cdot p^5$

$$(p^2 - 1) \cdot (p^2 - p) \cdot p^{12} \cdot (p - 1) \cdot p^5$$

51 Autre méthode: On commence par choisir les vecteurs de base qui sont dans le noyau. On prend une base de $\text{Im } N^2$ qui est de dim 2, soit $(p^2 - 1) \cdot (p^2 - p)$ puis un vecteur du noyau hors de $\text{Im } N^2$. soit $(p^3 - p^2)$ choix. On cherche alors des antécédants à ces vecteurs. (p^3 choix pour l'antécédant d'un vecteur)

52 $\text{cardstab2} := (p^2 - 1) \cdot (p^2 - p) \cdot (p^3 - p^2) \cdot (p^3)^3 \cdot (p^3)^2;$

$$(p^2 - 1) \cdot (p^2 - p) \cdot (p^3 - p^2) \cdot p^9 \cdot p^6$$

```

53 normal(cardstab-cardstab2);
0
54 cardGL8:=product((p^8-p^i),i=0..7);
(p^8 - 1) · (p^8 - p) · (p^8 - p^2) · (p^8 - p^3) · (p^8 - p^4) · (p^8 - p^5) · (p^8 - p^6) · (p^8 - p^7)
55 cardorbite:=normal(cardGL8/cardstab);
p^42 + p^41 + p^40 - p^38 + (-2) · p^37 + (-3) · p^36 + (-3) · p^35 + (-3) · p^34 - p^33 + p^32 + 4 · p^31 + 5 · p^30 + 6 · p^29 + 5 · p^28
(-4) · p^21 - p^20 + p^19 + 3 · p^18 + 3 · p^17 + 3 · p^16 + 2 · p^15 + p^14 - p^12 - p^11 - p^10
56
57 -----Exercice---syntaxe et combinatoire
des matrice nilpotentes-----
58 n:=5;purge(a);
(5, [0 0 1 0 0 0 0 0 ] )
59 A:=matrix(n,n,(i,j)->a[n*(i-1)+j]);
// Warning: a n declared as global variable(s)
a[6] a[7] a[8] a[9] a[10]
a[11] a[12] a[13] a[14] a[15]
a[16] a[17] a[18] a[19] a[20]
a[21] a[22] a[23] a[24] a[25]
60 l:=seq(a[j],i=1..n^2);
a[1] a[2] a[3] a[4] a[5] a[6] a[7] a[8] a[9] a[10] a[11] a[12] a[13] a[14] a[15] a[16] a[17] a[18] a[19] a[20] a[21] a[22] a[23] a[24] a[25]
61 Pour convertir la liste l en une matrice a n colonne:
62 A:=list2mat(l,n);
a[1] a[2] a[3] a[4] a[5]
a[6] a[7] a[8] a[9] a[10]
a[11] a[12] a[13] a[14] a[15]
a[16] a[17] a[18] a[19] a[20]
a[21] a[22] a[23] a[24] a[25]
63 J:=matrix(n,n):J[1,2]:=1:J[3,4]:=1:J;
( Done, Done, Done,
0 1 0 0 0
0 0 0 0 0
0 0 0 1 0
0 0 0 0 0
0 0 0 0 0 )
64 L:=mat2list(A*J*J*A);
-(a[6]) a[1] - (a[7]) -(a[8]) a[3] - (a[9]) -(a[10]) 0 a[6] 0 a[8] 0 -(a[16]) a[11] - (a[17]) -(a[18])

```


83 dim(STAB);

1536

Menu

84 Le cardinal du stabilisateur est aussi le nombre de bases qui Jordanisent l'endomorphisme J . de partition:
XX qui represente e_1e_2
XX e_3e_4
X e_5
on choisit d'abord les classes de e_2 et e_4 dans $\ker J^2/\ker J$ qui est de dim 2, ce qui fait $3 \cdot 2$ choix (le cardinal de $GL_2(\mathbb{F}_2)$). puis on remonte ces classes dans $\ker J^2$. (Chaque classe a autant d'antecedants que $\ker J: 2^3$. On a donc $6 \cdot 8 \cdot 8$ choix pour e_2, e_4 . ils determinent e_1 et e_3 . On choisit e_5 dans $\ker N(\text{vect}(e_1, e_3)): 8-4$ choix. Au total: $6 \cdot 8 \cdot 8 \cdot 4 = 1536$

85