1
```
restart;maple_mode(1);cas_setup(0,0,0,1,0,1e-10,10,[1,50,0,25],0,0,0);#radians,pas de cmplx, pas de  Sqrt
```

Warning: some commands like subs might change arguments order ... 0 0 0 1 0 1e-10 10 [1 50 0 25] 0 0

2 G(n,m) est biparti ssi n pair et m impair

3 G(5,1) est de Cayley pour (Z/10Z,+),{-2,2,5}. Avec valence 3, L contient un element egal a son inverse et pas le neutre donc G=Z/10Z et L contient 5. Dans le cas de G(5,2), L doit aussi contenir un element d'ordre 5, ce qui donne en fait G(5,1).

4 c_i est au signe pres la somme des mineurs diagonaux de taille i. (On derive i fois le polynome caracteristique). Pour c2, ils sont soit nuls, soit [[0,1],[1,0]] selon que (s_i,s_j) est un cote, ou pas. Cette somme est donc le nombre de cote. De meme, pour c_3, la seule matrice symetrique inversible de diagonale nulle que l'on peut faire avec des 0 et 1 est [[0,1,1],[1,0,1],[1,1,0]]. Ce mineur correspond au cas ou le triangle correspondant {'a} ces 3 sommets est dans le graphe. Comme ce determinant vaut 2, c3 vaut au signe pres 2 fois le nombre de triangle.

5 Si c est le nombre de composantes connexes d'un graphe sesquivalent, alors une permutation associee a ce graphe se decompose en c cycles. notons c0, c1 le nombre de cycles de longueur pair et impair. Comme un cycle de longueur impair a un support de taille impair, le produit des cycles de longueur impair a un support de parite c1. Donc n-c1 est pair car il a meme parite que le support du produit des cycles pairs. donc n-c=n-c1-c0 a meme parite que c0

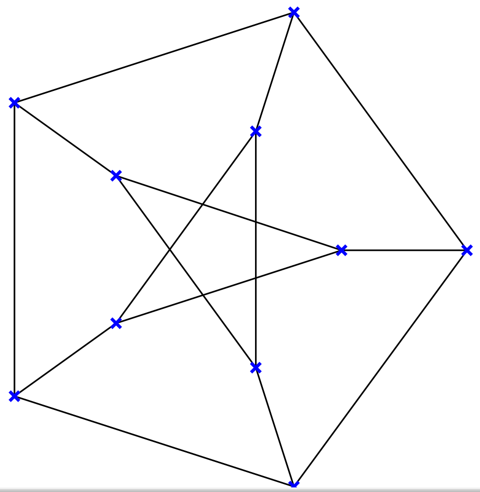
6 En passant modulo 4, un seul des x_i est impair. Donc choisir x_0 impair positif divise pas 8 le nombre de solutions

7
```
switch_axes(0):
 dessinG:=proc(n,m)
local a,L;
a:=exp(2.0*I*Pi/n);
L:='affichage=(point_width_2+hidden_name+bleu)';
#On separe par des , car la procedure ne retourne que la derniere instruction
seq(segment(a^k,a^(k+m)),k=1..n),seq(segment(2*a^k,2*a^(k+1)),k=1..n),seq(segment(a^k,2*a^(k)),k=1..n),seq(point(a^(k),L),k=1..n),se
end_proc;
```

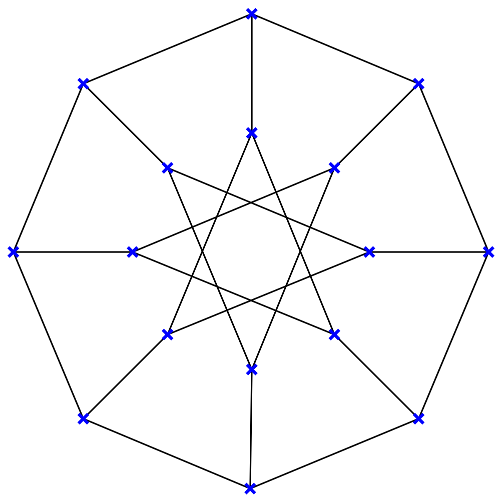
// Warning: k declared as global variable(s)
// End defining dessinG

```
proc(n,m)
 local a,L;
 a:=exp(2.0*(I)*Pi/n);
 L:=quote('display'=(point_width_2+hidden_name+bleu));
 seq(segment(a^k,a^(k+m)),k=(1 .. n)),seq(segment(2*a^k,2*a^(k+1)),k=(1 .. n)),seq(segment(a^k,2*a^k),k=(1 .. n)),seq(point(
Done ,  end;
```

8
```
dessinG(5,2);
```



9 dessinG(8,3)



10 n:=8;m:=3;

(8, 3)

11 On cree d'abord une matrice de permutation circulaire que l'on symetrise

12 purge(i,j):f:=(i,j)-> if (i-j) mod n = 1 then 1 else 0 fi:

// Warning: n declared as global variable(s)
// End defining f

(Done , Done)

13 A:=matrix(n,n,f)+transpose(matrix(n,n,f)

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

14 En suite on cree la permutation avec pas de m que l'on symetrise:

15 g:=(i,j)-> if (i-j) mod n = m then 1 else 0 fi:

// Warning: n m declared as global variable(s)
// End defining g

Done

16 B:=matrix(n,n,g)+transpose(matrix(n,n,g));

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

17 Ensuite on cree une matrice par blocs en rajoutant le fait que les sommets de
meme indice sont lies. (le bloc identite)

18 G:=blockmatrix(2,2,[A,identity(n),identity(n),B]);

$$\begin{bmatrix}
0&1&0&0&0&0&0&1&1&0&0&0&0&0&0&0\\
1&0&1&0&0&0&0&0&0&1&0&0&0&0&0&0\\
0&1&0&1&0&0&0&0&0&0&1&0&0&0&0&0\\
0&0&1&0&1&0&0&0&0&0&0&1&0&0&0&0\\
0&0&0&1&0&1&0&0&0&0&0&0&1&0&0&0\\
0&0&0&0&1&0&1&0&0&0&0&0&0&1&0&0\\
0&0&0&0&0&1&0&1&0&0&0&0&0&0&1&0\\
1&0&0&0&0&0&1&0&0&0&0&0&0&0&0&1\\
1&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&1&0&1&0&0\\
0&1&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&1&0&1&0\\
0&0&1&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&1&0&1\\
0&0&0&1&0&0&0&0&1&0&0&0&0&0&1&0\\
0&0&0&0&1&0&0&0&0&1&0&0&0&0&0&1\\
0&0&0&0&0&1&0&0&1&0&1&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&1&0&0&1&0&1&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&1&0&0&1&0&1&0&0&0
\end{bmatrix}$$

19 G^2;#le graphe est de valence 3 cf termes diago

$$\begin{bmatrix}
3&0&1&0&0&0&1&0&0&1&0&1&0&1&0&1\\
0&3&0&1&0&0&0&1&1&0&1&0&1&0&1&0\\
1&0&3&0&1&0&0&0&0&1&0&1&0&1&0&1\\
0&1&0&3&0&1&0&0&1&0&1&0&1&0&1&0\\
0&0&1&0&3&0&1&0&0&1&0&1&0&1&0&1\\
0&0&0&1&0&3&0&1&1&0&1&0&1&0&1&0\\
1&0&0&0&1&0&3&0&0&1&0&1&0&1&0&1\\
0&1&0&0&0&1&0&3&1&0&1&0&1&0&1&0\\
0&1&0&1&0&1&0&1&3&0&1&0&0&0&1&0\\
1&0&1&0&1&0&1&0&0&3&0&1&0&0&0&1\\
0&1&0&1&0&1&0&1&1&0&3&0&1&0&0&0\\
1&0&1&0&1&0&1&0&0&1&0&3&0&1&0&0\\
0&1&0&1&0&1&0&1&0&0&1&0&3&0&1&0\\
1&0&1&0&1&0&1&0&0&0&0&1&0&3&0&1\\
0&1&0&1&0&1&0&1&1&0&0&0&1&0&3&0\\
1&0&1&0&1&0&1&0&0&1&0&0&0&1&0&3
\end{bmatrix}$$

20 3 est bien la plus grande valeur propre, et elle est de multiplicite 1, le
graphe peut etre connexe. on passe en flottants pour aller plus vite.

21 sort(eigenvals(G*1.0));

-3 1.732050808 1.732050808 1.732050808 1.732050808 1 1 1 1.0 1 1 1.732050808 1.732050808

22 c_i est au signe pres la somme des mineurs diagonaux de taille i. Pour c2, ils
sont soit nuls, soit [[0,1],[1,0]] selon que (s_i,s_j) est un cote, ou
pas. Cette somme est donc le nombre de cote. De meme, pour c_3, la seule
matrice symetrique inversible de diagonale nulle que l'on peut faire avec des 0
et 1 est [[0,1,1],[1,0,1],[1,1,0]]. Ce mineur correspond au cas ou le triangle
correspondant {'a} ces 3 sommets est dans le graphe. Comme ce determinant vaut 2,
c3 vaut au signe pres 2 fois le nombre de triangle.

23 charpoly(G)

[1 0 -24 0 228 0 -1144 0 3342 0 -5832 0 5940 0 -3240 0 729]

24 On voit deja qu'il n'y a pas de triangles a cause du coeff c3=0, et qu'il y a
3n=c3 aretes. D'autre part, d'un sommet part 6 chemins de longuer 2 puisque le
graphe est 3 regulier. V{'e}rification:

25 [seq(1,i=1..2*n)]*(G^2-3*identity(2*n));

26 Donc le nombre de paires de cotes disjoints est:

27
```
nbpairesdisj:=(3*n)*(3*n-1)/2-(2*n*6)/2
```

228

28 Le nombre de 4 cycles est: (nombre de paires d'aretes disjointtes -c4)/2

29
```
(nbpairesdisj-charpoly(G)[5])/2;
```

0

30 On n'a donc pas de 4 cycles dans G(8,3), et comme c5=0, il a tour de taille
6,(on montre un chemin de longueur 6 sur le dessin). En revanche G(4,1) possede
6 4-cycles:

31 Fig Edit Graphe Frame Mode <Save figure as text>

1
```
switch_axes(0):
```
"Done"

2
```
n:=6;m:=1;
```
6,1

3
```
f:=(i,j)-> if (i-j) mod n = 1 then  1 else 0 fi;
```
// Warning: n declared as global variable(s)
// End defining f
(i,j)->if irem(i-j,n)=1 then

4
```
A:=matrix(n,n,f)+transpose(matrix(n,n,f));
```
matrix[[0,1,0,0,0,1],[1,0,1,0,0,0],[0,1,0,1,0,0],[0,0,1,0,1

5
```
g:=(i,j)-> if (i-j) mod n = m then 1 else 0 fi;
```
// Warning: n m declared as global variable(s)
// End defining g
(i,j)->if irem(i-j,n)=m then

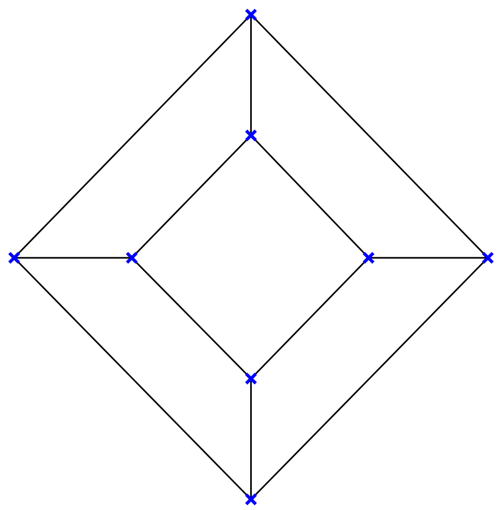
6
```
B:=matrix(n,n,g)+transpose(matrix(n,n,g));
```
matrix[[0,1,0,0,0,1],[1,0,1,0,0,0],[0,1,0,1,0,0],[0,0,1,0,1

7
```
G:=blockmatrix(2,2,[A,identity(n),identity(n),B]);
```
Done

8
```
nbpairesdisj:=(3*n)*(3*n-1)/2-(2*n*6)/2;
```
117

9
```
nb4cycles:=(nbpairesdisj-charpoly(G)[5])/2;
```
6

10
```
dessinG(4,1);
```



32
```
II:=matrix([[x,-y],[-y,-x]]);#manque un x dans l'enonce
```

$$\begin{bmatrix} x & -y \\ -y & -x \end{bmatrix}$$

33
```
KK:=matrix([[y,x],[x,-y]]);
```

$$\begin{bmatrix} y & x \\ x & -y \end{bmatrix}$$

34
```
JJ:=matrix([[0,1],[-1,0]]);
```

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$$

35
```
II^2;JJ^2;KK^2;II*JJ-KK;JJ*II+KK;KK*JJ+II;JJ*KK-II;KK*II-JJ;II*KK+JJ;
```

$x^2+y^2 \quad 0$ ..., $\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$, $y^2+x^2 \quad 0$ ..., $\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$, $0 \quad -y^2-x^2-1$ ..., 0

36 Ce qui donne bien les memes relations vu que x et y sont solutions
de x^2+y^2=-1.

37 pour eviter les doublons, et les cas avec +0=-0 on utilise des ensembles et no
des suites. D'autre part, pour creer une suite a partir de 2 suites:

38
```
augment([1,2],[2,3,4]);
```

39

40 Prog Edit Ajouter nxt OK Save

```
makeS:=proc(p)
S:={};
for a from 0 to p do
L:={};
for i from 0 to (sqrt(p-a)) do
j:=normal(sqrt(p-a-i^2))
if floor(j)=j then L:= L union {[i,j],[-i,j],[i,-j],[-i,-j} ;#NB: les ensembles simplifient les doub
fi
od
if L<> {} then
 for i from 1 to sqrt(a) by 2 do
 j:=normal(sqrt(a-i^2))
  if floor(j)=j then S:=S union {seq(augment([i,j],l),l=L),seq(augment([i,-j],l),l=L}
  fi
 od
fi
od
S;
end_proc:
```

// Warning: S a L i j l declared as global variable(s)
// End defining makeS

Done

41 danger avec floor d'un entier de gauss! il faut donc faire attention dans nos boucles a ne pas avoir de racines de negatifs

42 On teste un peu la procedure. lorsque le nombre n'est pas premier, on doit trouver somme des diviseurs.

43 makeS(5);

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 0 & -2 \\ 1 & 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & -2 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

44 dim(makeS(37));#on trouve bien p+1

$$\begin{bmatrix} 38 & 4 \end{bmatrix}$$

45 dim(makeS(5^4));1+5+5^2+5^3+5^4;

Evaluation time: 8.88

$$\left(\begin{bmatrix} 781 & 4 \end{bmatrix}, 781\right)$$

46

47 Prog Edit Ajouter nxt OK Save

```
chercheg:=proc(p,q)
qq:=q;#je ne sais pas pourquoi, le by q ne marche pas sans ca!
S:={};
for a from 0 to p do
L:={};
for i from 0 to (sqrt(p-a)) by evala(qq) do
j:=normal(sqrt(p-a-i^2))
if floor(j)==j and floor(j) mod q ==0 then L:= L union {[i,j],[-i,j],[i,-j],[-i,-j} ;#NB: les ensemb
fi
od
if L<> {} then
 for i from 1 to sqrt(a) by 2 do
 j:=normal(sqrt(a-i^2))
  if floor(j)==j and floor(j) mod q == 0 then S:=S union {seq(augment([i,j],l),l=L),seq(augment([i,-j
  fi;
 od;
fi;
od;
S;
end:
```

// Warning: qq S a L i j l declared as global variable(s)
// End defining chercheg

Done

48 chercheg(5,1); chercheg(5,2); transpose(chercheg(25,2));#on teste un peu

$$\left(\begin{bmatrix}1 & 0 & 0 & 2\\ 1 & 0 & 0 & -2\\ 1 & 0 & 2 & 0\\ 1 & 0 & -2 & 0\\ 1 & 2 & 0 & 0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}1 & 0 & 0 & 2\\ 1 & 0 & 0 & -2\\ 1 & 0 & 2 & 0\\ 1 & 0 & -2 & 0\\ 1 & 2 & 0 & 0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 3 & 3 & 3 & 3 & 1 & 1\\ 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & -2 & -2 & -2 & -2 & -2 & -2 & -2 & -2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 4 & 4\\ 2 & -2 & 2 & -2 & 4 & -4 & 4 & -4 & 2 & -2 & 2 & -2 & 4 & -4 & 4 & -4 & 0 & 0 & 4 & -4 & 2 & -2\\ 4 & 4 & -4 & -4 & 2 & 2 & -2 & -2 & 4 & 4 & -4 & -4 & 2 & 2 & -2 & -2 & 4 & -4 & 0 & 0 & 2 & 2\end{bmatrix}\right.$$

49 chercheg(25,3); chercheg(5,11); chercheg(5^2,11); chercheg(5^3,11); chercheg(5^4,11);

Evaluation time: 1.06

$$\left(\begin{bmatrix}5 & 0 & 0 & 0\end{bmatrix}, \{\}, \begin{bmatrix}5 & 0 & 0 & 0\end{bmatrix}, \{\}, \begin{bmatrix}25 & 0 & 0 & 0\end{bmatrix}\right)$$

50 chercheg(5^5,11);

Evaluation time: 9.55

$$\{\}$$

51 chercheg(5^6,11);#Donc le tour de taille est 6?

Evaluation time: 119.04

$$\begin{bmatrix}117 & 0 & 0 & 44\\ 117 & 0 & 0 & -44\\ 117 & 0 & 44 & 0\\ 117 & 0 & -44 & 0\\ 117 & 44 & 0 & 0\\ 117 & -44 & 0 & 0\\ 125 & 0 & 0 & 0\end{bmatrix}$$

52 44^2+117^2-5^6;

0

53 (1+2*I)^6 voici un cycle de longueur 6. car 117+44*I donne une homothetie dans PGL_2(ZZ/11/ZZ)

54 (117+44*I)-(1+2*I)^6;

0