1
```
restart;maple_mode(1);cas_setup(0,0,0,1,0,1e-10,10,[1,50,0,25],0,0,0); #radians,pas de cmplx, pas de  Sqrt
```
```
Warning: some commands like subs might change arguments order     0  0  0  1  0  1e-10  10  [1  50  0  25]  0  0
```

2 On prend une conique passant par (0,0,1), puis on change de variable.

3
```
C:=add(add(rand(20)()*x[i]*x[j],i=1..3),j=1..2);
```
```
19·(x[1])·(x[1])+15·(x[2])·(x[1])+7·(x[3])·(x[1])+4·(x[1])·(x[2])+10·(x[2])·(x[2])+17·(x[3])·(x[2])
```

4
```
C:=normal(subs(x[1]=x[1]-x[3],x[2]=x[2]-x[3],C));
```
```
19·(x[1])^2+19·(x[1])·(x[2])+(-50)·(x[1])·(x[3])+10·(x[2])^2+(-22)·(x[2])·(x[3])+24·(x[3])^2
```

5 On cree la fonction associee a l'equation de la conique. On verifie qu'elle
contient: (1,1,1)

6
```
c:=unapply(C,x);c([1,1,1])
```
```
( x -> 19·(x[1])^2+19·(x[1])·(x[2])+(- 50·(x[1]))·(x[3])+10·(x[2])^2+(- 22·(x[2]))·(x[3])+24·(x[3])^2,  0 )
```

7
```
purge(u,v,a);M:=[1,1,1]+a*[u,v,0];
```
```
( No such variable u ,  No such variable v ,  No such variable a ,  [1+u·a   1+v·a   1] )
```

8
```
s:=simplify(c(M)/a);
```
```
19·a·u^2+19·a·u·v+10·a·v^2+7·u+17·v
```

9
```
para:=-coeff(s,a,1)*[1,1,1]+coeff(s,a,0)*[u,v,0];
```
```
[- 19·u^2 - 19·u·v - 10·v^2 +u·(7·u+17·v)   - 19·u^2 - 19·u·v - 10·v^2 +v·(7·u+17·v)   - 19·u^2 - 19·u·v - 10·v^2 ]
```

10
```
normal(c(para));  # verification:
```
```
0
```

11 la tangente au point para est la droite AB

12
```
A1:=[seq(diff(para[i],u),i=1..3)];
```
```
[- 19·2·u - 19·v +7·u+17·v+u·7   - 19·2·u - 19·v +v·7   - 19·2·u - 19·v ]
```

13
```
B1:=[seq(diff(para[i],v),i=1..3)];
```
```
[- 19·u - 10·2·v +u·17   - 19·u - 10·2·v +7·u+17·v+v·17   - 19·u - 10·2·v ]
```

14
```
AB:=simplify(a*A1+b*B1);
```
```
[- 24·a·u - 2·a·v - 2·b·u - 20·b·v   - 38·a·u - 12·a·v - 12·b·u - (-14)·b·v   - 38·a·u - 19·a·v - 19·b·u - 20·b
```

15
```
factor(c(AB));   # On trouve bien une racine double
```
```
3720·(a·v - u·b )^2
```

16
```
tgte:=add(subs(x[1]=para[1],x[2]=para[2],x[3]=para[3],diff(C,x[i]))*x[i],i=1..3);
```
```
(38·(- 19·u^2 - 19·u·v - 10·v^2 +u·(7·u+17·v))+19·(- 19·u^2 - 19·u·v - 10·v^2 +v·(7·u+17·v)) - 50·(- 19·u^2 - 19·u
(19·(- 19·u^2 - 19·u·v - 10·v^2 +u·(7·u+17·v))+20·(- 19·u^2 - 19·u·v - 10·v^2 +v·(7·u+17·v)) - 22·(- 19·u^2 - 19·u
```

17 verification: ca doit etre nul.

18
```
simplify(subs(seq(x[i]=A1[i],i=1..3),tgte));
```
```
0
```

19
```
simplify(subs(seq(x[i]=B1[i],i=1..3),tgte));
```
```
0
```

20
```
paff:=w->(subs(v=1,(w[1]+I*w[2])/w[3]));
```
```
// Warning: v  declared as global variable(s)
// End defining paff
```
```
w  -> subs(v=1,(w[1]+(I)*w[2])/(w[3]))
```

21
```
DC:=plotparam(paff(para),u=-5..5,affichage=bleu+line_width_2):
```
```
Done
```

22

23 Fig Edit Graphe Frame Mode <Save figure as text>

1 DC;

plotparam((-19*u^2-19*u-10+u*(7*u+17)+(l)*(-19*u^2-19*u-

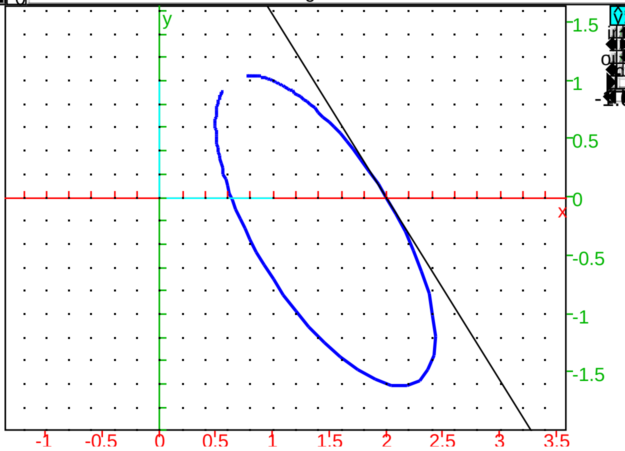
2 u:=element((-3) .. 3,-1.02)

parameter(u,-3,3,-1.02,0.06)

3 droite(paff(A1),paff(B1));

droite(y=(-1.569410357*x+3.139693564))

4



24 ---

25 On peut param'etrer les equations cart'esiennes, ie on en choisit 2
ind'ependantes et on regarde leur combinaisons lineaires, ou bien on
considere une droite projective d ne passant pas par le point O, et
l'on identifie les droites passant par O aux droites (OM) lorsque M decrit D

26 purge(s,t)

$(19\cdot a\cdot u^2+19\cdot a\cdot u\cdot v+10\cdot a\cdot v^2+7\cdot u+17\cdot v,$ No such variable t $)$

27 A:=matrix(2,2,(i,j)->a[i,j]);

// Warning: a declared as global variable(s)

$$\begin{bmatrix} a[1,1] & a[1,2] \\ a[2,1] & a[2,2] \end{bmatrix}$$

28 On modelise les droites passant par O1 par leur equations cartesiennes, ie les
combinaisons lineaires de x et y, et celles passant par O2 comme les droites
(O2,V) ou V bouge sur une droite ne passant pas par O2. Ex on a choisi pour V
la droite: y=z. On cree maintenant l'homographie h: (s,t)->(s',t'), qui a la
droite d'equation sx+ty=0 associe la droite passant par O2 et (s',t',t')

29 tmpV:=A*[[s],[t]]; #On veut que tmpV[i] represente les colonnes de A(s,t).

$$\begin{bmatrix} t\cdot(a[1,2])+s\cdot(a[1,1]) \\ t\cdot(a[2,2])+s\cdot(a[2,1]) \end{bmatrix}$$

30 V:=[tmpV[1,1],tmpV[2,1],tmpV[2,1]]; #On met le point V sur la droite y=z choisie.

$$[t\cdot(a[1,2])+s\cdot(a[1,1]) \quad t\cdot(a[2,2])+s\cdot(a[2,1]) \quad t\cdot(a[2,2])+s\cdot(a[2,1])]$$

31 c'est plus simple de prendre 1 forme cartesienne, et une parametrique.
On etudie O_2+l.V inter sx+ty=0

32 O2:=[0,1,0]; # les coordonees de O_2

$$[0 \quad 1 \quad 0]$$

33 [X,Y,Z]:=O2+l*V

$$[(t\cdot(a[1,2])+s\cdot(a[1,1]))\cdot l \quad 1+(t\cdot(a[2,2])+s\cdot(a[2,1]))\cdot l \quad (t\cdot(a[2,2])+s\cdot(a[2,1]))\cdot l]$$

34 L:= solve(s*X+t*Y=0,l);

$$-\left(\frac{t}{(a[1,2])\cdot t\cdot s+t^2\cdot(a[2,2])+t\cdot s\cdot(a[2,1])+s^2\cdot(a[1,1])}\right)$$

35 Attention solve travaille generiquement: par exemple si a(1,1) est nul, il faudrait simplifier par t
NB det(A) n'est pas nul, donc sa seconde ligne non plus.
Pb solve a suppose que l'un des 2 coeffs de la seconde ligne est nul en s=0 ou t=0
le point d'intersection est:

36 S:=O2+L*V;

$$\left[(t\cdot(a[1,2])+s\cdot(a[1,1]))\cdot\left(-\left(\frac{t}{(a[1,2])\cdot t\cdot s+t^2\cdot(a[2,2])+t\cdot s\cdot(a[2,1])+s^2\cdot(a[1,1])}\right)\right) \quad 1+(t\cdot(a[2,2])+\right.$$

37 Il aurait mieux valu ne pas utiliser solve. par exemple rester en homog'ene ainsi:

38 L1:=-coeff(s*X+t*Y,I,1);L2:=coeff(s*X+t*Y,I,0);

$$(-s^2 \cdot (a[1,1]) - s \cdot t \cdot (a[1,2]) - s \cdot t \cdot (a[2,1]) - t^2 \cdot (a[2,2]),\ t)$$

39 S:=L1*O2+L2*V;

$$[(t \cdot (a[1,2]) + s \cdot (a[1,1])) \cdot t\ \ - s^2 \cdot (a[1,1]) - s \cdot t \cdot (a[1,2]) - s \cdot t \cdot (a[2,1]) - t^2 \cdot (a[2,2]) + (t \cdot (a[2,2])$$

40 le cas a(1,1)=0 pose PB. si a(1,1)=0 ca n'est pas bon, il faut simplifier par t

41 purge(X,Y,Z);

$$((t \cdot (a[1,2]) + s \cdot (a[1,1])) \cdot I,\ 1 + (t \cdot (a[2,2]) + s \cdot (a[2,1])) \cdot I,\ (t \cdot (a[2,2]) + s \cdot (a[2,1])) \cdot I)$$

42 On passe maintenant en version affine z=1
Moralement X:=S[1]/S[3];Y:=S[2]/S[3];

43 P:=subs(t=1,X*S[3]-S[1]);Q:=subs(t=1,Y*S[3]-S[2]);

$$[X \cdot (1 \cdot (a[2,2]) + s \cdot (a[2,1])) \cdot 1 - (1 \cdot (a[1,2]) + s \cdot (a[1,1])) \cdot 1,\ Y \cdot (1 \cdot (a[2,2]) + s \cdot (a[2,1])) \cdot 1 + s^2 \cdot (a[1,$$

44 R:=resultant(P,Q,s);

$$X^2 \cdot (a[2,2])^2 \cdot (a[1,1]) - X^2 \cdot (a[2,2]) \cdot (a[2,1]) \cdot (a[1,2]) - X \cdot (a[2,2]) \cdot (a[2,1]) \cdot (a[1,1]) \cdot Y - X \cdot$$
$$X \cdot (a[2,1])^2 \cdot (a[1,2]) \cdot Y + X \cdot (a[2,1]) \cdot (a[1,2])^2 + (a[2,2]) \cdot (a[1,1])^2 \cdot Y - (a[2,1]) \cdot (a[1,2]) \cdot (a[1$$

45 eq:=factor(Z^2*subs(X=X/Z,Y=Y/Z,R)); #On recupere l'equation homogene.

46 eq:=simplify(eq/det(A)); #detA se factorise. On peut simplifiler car il est non nul

$$X^2 \cdot (a[2,2]) - X \cdot Y \cdot (a[2,1]) - X \cdot Z \cdot (a[1,2]) + Y \cdot Z \cdot (a[1,1])$$

47 f:=unapply(eq,X,Y,Z);

$$(X, Y, Z) \to X^2 \cdot (a[2,2]) - X \cdot Y \cdot (a[2,1]) - X \cdot Z \cdot (a[1,2]) + Y \cdot Z \cdot (a[1,1])$$

48 f(0,0,1);f(op(O2));#sont solutions evidentes.

$$(0, 0)$$

49 la droite (O_1O_2) a pour equation yo2.x-xo2.y=0, ie (s,t)=(yo2,-xo2) dans le
faisceau sx+ty=0. En revanche on a parametre le faisceau en O_2
grace au point (s',t',t') qui est sur la droite (O_1O_2) ssi s'.yo2-xo2.t'=0.
on doit donc exprimer h(yo2,-xo2) proportionnel a (xo2,yo2).

50 [xo2,yo2,zo2]:=O2;

$$[0\ \ 1\ \ 0]$$

51 V1:=A*matrix([[yo2],[-xo2]]);

$$\begin{bmatrix} a[1,1] \\ a[2,1] \end{bmatrix}$$

52 V2:=matrix([[xo2],[yo2]]);

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

53 casparticulier:=det(concat(V1,V2));

$$a[1,1]$$

54 factor(subs(casparticulier=0,f(x,y,z)));

$$x \cdot ((a[2,2]) \cdot x - y \cdot (a[2,1]) - z \cdot (a[1,2]))$$

55 l'equation de degre 2 se factorise par x ssi A[1,1]=0 ssi h(O_1O_2)=(O_1O_2)
on recommence avec un autre O_2

56 xo2:=1;yo2:=0;zo2:=1;# les coordonees de O_2

$$(1, 0, 1)$$

57 O2:=[xo2,yo2,zo2];

58 [X,Y,Z]:=O2+l*V;

[1+(t·(a[[1, 2]])+s·(a[[1, 1]]))·l (t·(a[[2, 2]])+s·(a[[2, 1]]))·l 1+(t·(a[[2, 2]])+s·(a[[2, 1]]))·l]

59 L1:=-coeff(s*X+t*Y,l,1);L2:=coeff(s*X+t*Y,l,0);

(- s^2·(a[[1, 1]]) - s·t·(a[[1, 2]]) - s·t·(a[[2, 1]]) - t^2·(a[[2, 2]]) , s)

60 S:=L1*O2+L2*V;

[- s^2·(a[[1, 1]]) - s·t·(a[[1, 2]]) - s·t·(a[[2, 1]]) - t^2·(a[[2, 2]]) +(t·(a[[1, 2]])+s·(a[[1, 1]]))·s (t·(a[[2, 2]])

61 pour calculer le resultant on travaille a une variable: ex on fait t=1
cette fois, On parametre les droites passant par O_2 via les equations
les droites passant par (1,0,1) sont: s'*(x-z)+t'*y

62 L1:=s*x+y;

s·x+y

63 L2:=op([x-z,y]*A*[[s],[1]]);

(a[[1, 2]])·(x - z)+s·((a[[1, 1]])·(x - z)+y·(a[[2, 1]]))+y·(a[[2, 2]])

64 eq:=resultant(L1,L2,s); #On a l'equation cartesienne tout de suite

x^2·(a[[1, 2]]) - x·y·(a[[1, 1]]) +x·y·(a[[2, 2]]) - x·(a[[1, 2]])·z - y^2·(a[[2, 1]]) +y·z·(a[[1, 1]])

65 On a donc montr'e que si h est une homographie entre deux faisceaux de droites
disctincts le lieu de points d'intersection entre d et h(d) decrit une conique
non degeneree passant par O1 et O2 si h(O1O2) est different de (O1O2), et
decrit une droite si h(O1O2)=(O1O2)

66 a:=[[1,1],[2,3]];

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$$

67

68 Fig Edit Graphe Frame Mode <Save figure as text>

1 implicitplot(subs(z=1,eq),x=-5..5,y=-5..5,couleur=bleu+line_

Hyperbola of center (1/6,1/3)

[plotparam(Done,t=-3.0..3.0),plotparam(Done,t=-3.0..3.0)]

2 s:=element((-2) .. 2,1.16)

parameter(s,-2,2,1.16,0.04)

3 d:=droite(L1=0);

droite(y=(-1.16*x))

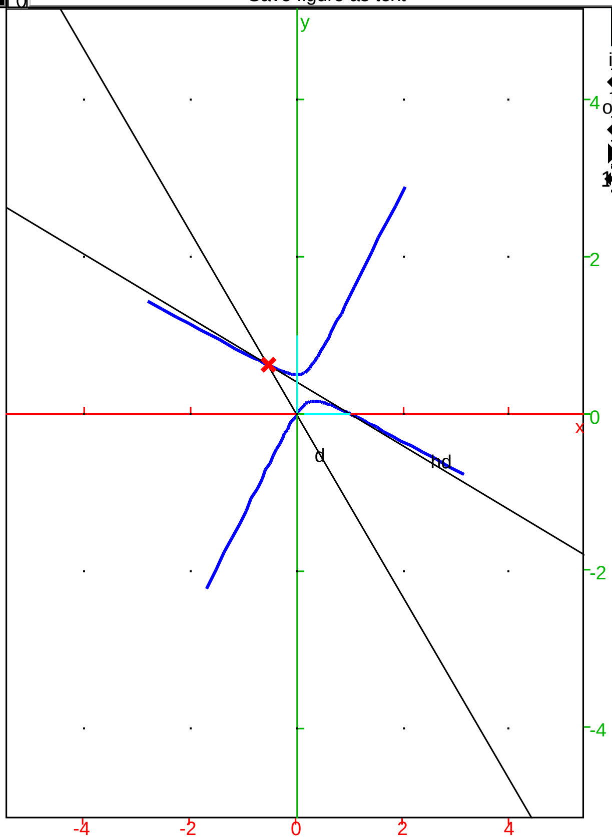
4 hd:=droite(subs(z=1,L2)=0);

droite(y=(-0.4060150376*x+0.4060150376))

5 inter(d,hd,couleur=red+point_width_3)

[point(-0.5384922218,0.6246509773)]

6



69 --